

**ĐẶNG VIỆT ĐÔNG**

**TOÁN THỰC TẾ**  
**ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM**  
**VÀ KHẢO SÁT HÀM SỐ**  
**(THEO CT SGK MỚI)**



## ỨNG DỤNG THỰC TẾ ĐẠO HÀM VÀ KHẢO SÁT HÀM SỐ

### DẠNG 1: ỨNG DỤNG THỰC TẾ ĐẠO HÀM

**Loại 1: Toán thực tế liên quan đến chuyển động: vận tốc, gia tốc**

**Phương pháp:** Nếu phương trình chuyển động của vật là  $s = f(t)$

+ Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm  $t$ :  $v(t) = f'(t)$

+ Gia tốc tức thời của chuyển động:  $a(t) = f''(t)$ .

**Câu 1.** (TH) Chuyển động thẳng xác định bởi phương trình  $s = t^3 - 3t^2$  ( $t$  tính bằng giây,  $s$  tính bằng mét). Tìm mệnh đề đúng.

A. Vận tốc của chuyển động khi  $t = 3s$  là  $v = 12m/s$ .

B. Vận tốc của chuyển động khi  $t = 4s$  là  $v = 24m/s$ .

C. Gia tốc của chuyển động khi  $t = 4s$  là  $a = 9m/s^2$ .

D. Vận tốc của chuyển động khi  $t = 3s$  là  $v = 24m/s$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có phương trình vận tốc theo thời gian là  $v = s' = 3t^2 - 6t$

Khi  $t = 4s$  thì vận tốc đạt  $v(4) = 3.4^2 - 6.4 = 24m/s$ .

**Câu 2.** (TH) Cho chất điểm chuyển động với phương trình  $s = -t^3 + 6t^2$  với  $t \in [0; 6]$ . Tại thời điểm nào thì vận tốc của chất điểm bằng 0?

A. 1s.

B. 3s.

C. 2s.

D. 4s.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có  $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 12t$ .

$$v(t) = 0 \Leftrightarrow -3t^2 + 12t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 4 \end{cases}.$$

Vậy tại thời điểm  $t = 4s$  thì vận tốc của chất điểm bằng 0.

**Câu 3.** (TH) Một vật chuyển động với phương trình  $S(t) = t^3 + 4t^2$ , trong đó  $t$  (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu di chuyển,  $S(t)$  (mét) là quãng đường vật chuyển động được trong  $t$  giây. Tính gia tốc của vật tại thời điểm vận tốc bằng  $11(m/s)$ .

A.  $14(m/s^2)$ .

B.  $12(m/s^2)$ .

C.  $13(m/s^2)$ .

D.  $11(m/s^2)$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Vận tốc chuyển động của vật có phương trình là  $V(t) = 3t^2 + 8t$ .

Gia tốc chuyển động của vật có phương trình là  $a(t) = 6t + 8$ .

Thời điểm vận tốc bằng  $11(m/s)$  ứng với  $3t^2 + 8t = 11 \Leftrightarrow t = 1(s)$ .

Gia tốc của vật cần tìm là  $a(1) = 6 + 8 = 14(m/s^2)$ .

**Câu 4.** (TH) Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình  $S = -t^3 + 3t^2 + 9t$ , trong đó  $t$  tính bằng giây và  $S$  tính bằng mét. Tính vận tốc của chuyển động tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.

A.  $11m/s$ .

B.  $6m/s$ .

C.  $12m/s$ .

D.  $0m/s$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Vận tốc của chuyển động chính là đạo hàm cấp một của quãng đường:  $v = S' = -3t^2 + 6t + 9$

Gia tốc của chuyển động chính là đạo hàm cấp hai của quãng đường:  $a = S'' = -6t + 6$

Gia tốc triệt tiêu khi  $S'' = 0 \Leftrightarrow t = 1$ .

Khi đó vận tốc của chuyển động là  $S'(1) = 12 \text{ m/s}$ .

**Câu 5. (TH)** Một chất điểm chuyển động thẳng quãng đường được xác định bởi phương trình  $s = t^3 - 3t^2 - 5$  trong đó quãng đường  $s$  tính bằng mét (m), thời gian  $t$  tính bằng giây (s). Khi đó gia tốc tức thời của chuyển động tại giây thứ 10 là

A.  $6 \text{ m/s}^2$ .

B.  $240 \text{ m/s}^2$ .

C.  $60 \text{ m/s}^2$ .

D.  $54 \text{ m/s}^2$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có  $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t$ ;  $a(t) = v'(t) = 6t - 6$ .

Gia tốc chuyển động tại giây thứ 10 là  $a(10) = v'(10) = 6 \cdot 10 - 6 = 54 \text{ (m/s}^2\text{)}$ .

**Câu 6. (VD)** Một vật chuyển động trên đường thẳng được xác định bởi công thức  $s(t) = t^3 - t^2 + 5t + 2$ , trong đó  $t$  là thời gian tính bằng giây và  $s$  là quãng đường chuyển động của vật tính bằng mét. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Vận tốc của vật tại thời điểm  $t = 2$  là  $9 \text{ (m/s)}$ .

b) Gia tốc của vật tại thời điểm  $t = 3$  là  $16 \text{ (m/s}^2\text{)}$ .

c) Quãng đường chuyển động của vật tại thời điểm mà vận tốc của vật bằng  $45 \text{ (m/s)}$  là  $70 \text{ (m)}$ .

d) Vận tốc của vật tại thời điểm mà gia tốc của vật bằng  $34 \text{ (m/s}^2\text{)}$  là  $101 \text{ (m/s)}$ .

**Lời giải**

(a) Sai. Vận tốc của vật tại thời điểm  $t$  là  $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 2t + 5$ .

Vận tốc của vật tại thời điểm  $t = 2$  là  $v(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 5 = 13 \text{ (m/s)}$  nên mệnh đề sai.

(b) Đúng. Gia tốc của vật tại thời điểm  $t$  là  $a(t) = s''(t) = 6t - 2$ .

Vận tốc của vật tại thời điểm  $t = 3$  là  $a(3) = 6 \cdot 3 - 2 = 16 \text{ (m/s}^2\text{)}$  nên mệnh đề đúng.

(c) Sai. Vận tốc của vật bằng  $45 \text{ (m/s)}$  tại thời điểm  $t$  suy ra

$$v(t) = 45 \Leftrightarrow 3t^2 - 2t + 5 = 45 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \text{ (thỏa mãn)} \\ t = -\frac{10}{3} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Quãng đường chuyển động của vật tại thời điểm  $t = 4$  là  $s(4) = 4^3 - 4^2 + 5 \cdot 4 + 2 = 70 \text{ (m)}$  nên mệnh đề đúng.

(d) Đúng. Gia tốc của vật bằng  $34 \text{ (m/s}^2\text{)}$  tại thời điểm  $t$  suy ra

$$a(t) = 34 \Leftrightarrow 6t - 2 = 34 \Leftrightarrow t = 6$$

Vận tốc của vật tại thời điểm  $t = 6$  là  $v(6) = 3 \cdot 6^2 - 2 \cdot 6 + 5 = 101 \text{ (m/s)}$  nên mệnh đề đúng.

**Câu 7. (VD)** Một chất điểm chuyển động theo quy luật  $S = 6t^2 - t^3$ , vận tốc  $v \text{ (m/s)}$  của chuyển động đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm  $t \text{ (s)}$  bằng

A. 2 (s)

B. 12 (s)

C. 6 (s)

D. 4 (s)

**Lời giải**

**Chọn A**

Vận tốc của chuyển động là  $v = s'$  tức là  $v(t) = 12t - 3t^2, t > 0$

$$v'(t) = 12 - 6t, v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

Bảng biến thiên:

|         |   |   |           |   |
|---------|---|---|-----------|---|
| $t$     | 0 | 2 | $+\infty$ |   |
| $v'(t)$ |   | + | 0         | - |
| $v(t)$  |   |   | 12        |   |

Hàm số  $v(t)$  đồng biến trên khoảng  $(0;2)$  và nghịch biến trên khoảng  $(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow \text{Max } v(t) = 12$  khi  $t = 2$ . Vận tốc đạt giá trị lớn nhất bằng 12 khi  $t = 2$ .

- Câu 8.** (VD) Một vật chuyển động theo quy luật  $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$  với  $t$  (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và  $s$  (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 243 (m/s)

B. 27 (m/s)

C. 144 (m/s)

D. 36 (m/s)

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có:  $v = s' = -t^2 + 12t$ ;  $v' = -2t + 12$ ;  $v' = 0 \Leftrightarrow t = 6$ .

BBT

|      |                                                |   |   |
|------|------------------------------------------------|---|---|
| $t$  | 0                                              | 6 | 9 |
| $v'$ | +                                              | 0 | - |
| $v$  | <div><div></div><div>36</div><div></div></div> |   |   |

Nhìn bbt ta thấy vận tốc đạt giá trị lớn nhất khi  $t = 6$ . Giá trị lớn nhất là  $v(6) = 36\text{m/s}$ .

- Câu 9.** (VD) Một chất điểm chuyển động theo quy luật  $S(t) = 1 + 3t^2 - t^3$ . Vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất khi  $t$  bằng bao nhiêu

A.  $t = 2$ .

B.  $t = 1$ .

C.  $t = 3$ .

D.  $t = 4$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Chất điểm chuyển động theo quy luật  $S(t) = 1 + 3t^2 - t^3$ . Vì vận tốc của chuyển động ở thời điểm  $t$  chính là  $S'(t)$ ; ta đi tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $S'(t)$ .

$$\text{Ta có } S'(t) = (1 + 3t^2 - t^3)' = 6t - 3t^2 = -3(t^2 - 2t) = 3 - 3(t-1)^2 \leq 3, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\max_{\mathbb{R}} S'(t) = 3 \text{ khi } t-1 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

- Câu 10.** (VD) Một chất điểm chuyển động theo quy luật  $S = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 9t$  với  $t$  là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và  $S$  là quãng đường vật chuyển động trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 3 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của chất điểm là bao nhiêu?

- A. 11 (m/s).      B. 25 (m/s).      C. 24 (m/s).      D. 100 (m/s).

**Lời giải**

**Chọn C**

Vận tốc của chất điểm là  $v(t) = S'(t) = -t^2 + 8t + 9$ .

Xét hàm số  $f(t) = v(t) = -t^2 + 8t + 9$  trên đoạn  $[0; 3]$ .

Bảng biến thiên:

|        |           |   |    |    |           |
|--------|-----------|---|----|----|-----------|
| $t$    | $-\infty$ | 0 | 3  | 4  | $+\infty$ |
| $f(t)$ | $-\infty$ | 9 | 24 | 25 | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên suy ra vận tốc lớn nhất của chất điểm trong khoảng thời gian 3 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động là 24 (m/s) đạt tại  $t = 3(s)$ .

- Câu 11. (VD)** Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là  $s = -t^3 + 6t^2 + 17t$ , với  $t(s)$  là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và  $s(m)$  là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Trong khoảng thời gian 8 giây đầu tiên, vận tốc  $v(m/s)$  của chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng?
- Câu 12. (VD)** Một chất điểm chuyển động theo phương trình  $S = -2t^3 + 18t^2 + 2t + 1$ , trong đó  $t$  tính bằng giây (s) và  $S$  tính bằng mét (m). Tính thời gian vận tốc chất điểm đạt giá trị lớn nhất.

- A.  $t = 5s$       B.  $t = 6s$       C.  $t = 3s$       D.  $t = 1s$

**Lời giải**

**Chọn C**

Có  $v(t) = S' = -6t^2 + 36t + 2$ . Đây là hàm số bậc hai có  $a < 0$  nên nó sẽ đạt giá trị lớn nhất tại  $t = -\frac{b}{2a} = 3(s)$ .

- Câu 13. (VD)** Một vật chuyển động theo quy luật  $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$  với  $t$  (giây) là khoảng thời gian từ khi vật bắt đầu chuyển động và  $s$  (mét) là quãng đường vật di chuyển trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất vật đạt được bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

**Đáp án:** 24(m/s)

Ta có  $v = s' = -\frac{3}{2}t^2 + 12t = -\frac{3}{2}(t^2 - 8t + 16) + 24 = 24 - \frac{3}{2}(t - 4)^2 \leq 24$

Vậy  $\max_{[0;6]} v(t) = 24(m/s)$  tại thời điểm  $t = 4$  (giây).

- Câu 14. (VD)** Một chất điểm chuyển động theo quy luật  $s(t) = -t^3 + 6t^2$  với  $t$  là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động,  $s(t)$  là quãng đường đi được trong khoảng thời gian  $t$ . Tính thời điểm  $t$  tại đó vận tốc đạt giá trị lớn nhất.

**Lời giải**

**Đáp án:**  $t = 2$

$s(t) = -t^3 + 6t^2$

$$v(t) = s'(t) = -3t^2 + 12t$$

$$v_{\max} = \frac{-12^2}{4 \cdot (-3)} = 12 \Leftrightarrow t = \frac{-12}{2 \cdot (-3)} = 2.$$

- Câu 15. (VD)** Một vật chuyển động theo quy luật  $s = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 9t$ , với  $t$  (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và  $s$  (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

**Đáp án:** vận tốc lớn nhất là 89 (m/s).

Ta có  $v(t) = s'(t) = t^2 - 2t + 9$ .

Ta có:  $v' = 2t - 2 \Rightarrow v' = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Tính:  $v(1) = 8$ ;  $v(10) = 89$ ,  $v(0) = 9$ .

Vậy vận tốc lớn nhất là 89 (m/s).

- Câu 16. (VD)** Một chất điểm chuyển động theo quy luật  $s(t) = t^2 - \frac{1}{6}t^3$  (m). Tìm thời điểm  $t$  (giây) mà tại đó vận tốc  $v$  (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.

**Lời giải**

**Đáp án:**  $t = 2$

Vận tốc của chất điểm chuyển động theo quy luật:  $v(t) = s'(t) = 2t - \frac{1}{2}t^2$ .

Vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất khi  $v(t) = 2t - \frac{1}{2}t^2$  đạt giá trị lớn nhất  $\Leftrightarrow t = 2$ .

- Câu 17. (VD)** Một chất điểm chuyển động trong 20 giây đầu tiên có phương trình  $s(t) = \frac{1}{12}t^4 - t^3 + 6t^2 + 10t$ , trong đó  $t > 0$  với  $t$  tính bằng giây (s) và  $s(t)$  tính bằng mét (m). Hỏi tại thời điểm gia tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất thì vận tốc của vật bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

**Đáp án:**  $v = 28$  (m/s)

Vận tốc của chuyển động là  $v(t) = s'(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 12t + 10$ .

Gia tốc của chuyển động là  $a(t) = v'(t) = t^2 - 6t + 12 = (t - 3)^2 + 3$ .

Vậy gia tốc đạt giá trị nhỏ nhất khi  $t = 3$ . Khi đó vận tốc của vật bằng  $v(3) = 28$  (m/s).

- Câu 18. (VD)** Một chất điểm chuyển động trong 60 giây đầu tiên có phương trình  $s(t) = \frac{1}{12}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + 6t^2 + 7t$ , trong đó  $t > 0$  với  $t$  tính bằng giây (s) và  $s(t)$  tính bằng mét (m). Hỏi tại thời điểm gia tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất thì vận tốc của vật bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn hàng phần mười)?

**Lời giải**

Vận tốc của chuyển động là  $v(t) = s'(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 12t + 7$ .

Gia tốc của chuyển động là  $a(t) = v'(t) = t^2 - 4t + 12 = (t - 2)^2 + 8$ .

Vậy gia tốc đạt giá trị nhỏ nhất khi  $t = 2$ . Khi đó vận tốc của vật bằng  $v(2) = \frac{77}{3} (m/s)$ .

**Đáp án: 25,7**

**Câu 19. (VD)** Một vật chuyển động trên đường thẳng được xác định bởi công thức  $s(t) = t^3 - 3t^2 + 7t - 2$ , trong đó  $t > 0$  và tính bằng giây và  $s$  là quãng đường chuyển động được của vật trong  $t$  giây tính bằng mét. Khi đó:

**a)** Tốc độ của vật tại thời điểm  $t = 2$  là  $7(m/s)$

**b)** Gia tốc của vật tại thời điểm  $t = 2$  là  $6(m/s^2)$

**c)** Gia tốc của vật tại thời điểm mà vận tốc của chuyển động bằng  $16m/s^2$  là  $10(m/s^2)$

**d)** Thời điểm  $t = 1$  (giây) tại đó vận tốc của chuyển động đạt giá trị nhỏ nhất

**Lời giải**

Ta có:  $s'(t) = 3t^2 - 6t + 7$  và  $s''(t) = 6t - 6$ .

**(a)** Vận tốc của vật tại thời điểm  $t = 2$  là:  $v(2) = s'(2) = 3.2^2 - 6.2 + 7 = 7(m/s)$ .

**(b)** Gia tốc của vật tại thời điểm  $t = 2$  là:  $a(2) = v'(2) = s''(2) = 6.2 - 6 = 6(m/s^2)$ .

**(c)** Vận tốc của chuyển động bằng  $16m/s^2$  tại thời điểm  $t$  nghĩa là:

$$v(t) = s'(t) = 16 \Leftrightarrow 3t^2 - 6t + 7 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \text{ (thỏa mãn)} \\ t = -1 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Gia tốc của vật tại thời điểm  $t = 3$  là:  $a(3) = v'(3) = s''(3) = 6.3 - 6 = 12(m/s^2)$ .

**(d)** Vận tốc của chuyển động có phương trình  $v(t) = 3t^2 - 6t + 7$  là một parabol, có đỉnh

$$S\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow S(1; 4) \text{ và hệ số } a = 3 > 0 \text{ nên hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 4 tại } t = 1.$$

(hoặc sử dụng máy tính Casio để tìm min)

Vậy tại thời điểm  $t = 1$  thì vận tốc của chuyển động đạt giá trị nhỏ nhất bằng  $4(m/s)$ .

**Câu 20. (VD)** Phương trình chuyển động của một hạt được cho bởi công thức  $s(t) = 10 + \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + 4\pi t\right)$ , trong đó  $s$  tính bằng centimet và  $t$  được tính bằng giây.

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

**a)** Gia tốc của hạt tại thời điểm  $t = 3$  giây là  $-16\pi^2 \text{ cm/s}^2$

**b)** Vận tốc của hạt tại thời điểm  $t = 3$  giây là  $2\pi \text{ cm/s}$ .

**c)** Vận tốc lớn nhất của hạt đạt được là  $4\pi\sqrt{2} \text{ cm/s}$ .

**d)** Gia tốc nhỏ nhất của hạt đạt được là  $-16\pi^2 \text{ cm/s}^2$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$\text{Vận tốc của hạt tại thời điểm } t \text{ là } v(t) = s'(t) = 4\pi\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + 4\pi t\right).$$

$$\text{Gia tốc của hạt tại thời điểm } t \text{ là } a(t) = s''(t) = -16\pi^2\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + 4\pi t\right).$$

**(a)** Đúng. Tại thời điểm  $t = 3$  giây thì gia tốc của hạt là  $a = -16\pi^2\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + 12\pi\right) = -16\pi^2 (\text{cm/s}^2)$ .

- (b) Sai. Tại thời điểm  $t = 3$  giây thì vận tốc của hạt là  $v = 4\pi\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + 4\pi \cdot 3\right) = 4\pi$  (cm/s).
- (c) Đúng. Ta có  $-4\pi\sqrt{2} \leq 4\pi\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + 4\pi t\right) \leq 4\pi\sqrt{2}$  nên vận tốc lớn nhất của hạt đạt được là  $4\pi\sqrt{2}$  cm/s.
- (d) Sai. Ta có  $-16\pi^2\sqrt{2} \leq -16\pi^2\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + 4\pi t\right) \leq 16\pi^2\sqrt{2}$  nên gia tốc nhỏ nhất của hạt đạt được là  $-16\pi^2\sqrt{2}$  cm/s<sup>2</sup>.

**Câu 21. (VD)** Một chất điểm chuyển động theo phương trình  $s = f(t) = 0,5 \cos(2\pi t)$ , trong đó  $s$  tính bằng mét,  $t$  tính bằng giây.

- a) Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm  $t$  là  $-\pi \sin(2\pi t)$  (m/s).
- b) Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm  $t$  là  $-2 \cos(2\pi t)$  (m/s<sup>2</sup>).
- c) Vận tốc lớn nhất của chất điểm bằng  $\pi$  (m/s).
- d) Gia tốc lớn nhất của chất điểm bằng  $2\pi^2$  (m/s<sup>2</sup>).

#### Lời giải

- (a) Đúng;  $s' = f'(t) = -0,5 \cdot 2\pi \cdot \sin(2\pi t) = -\pi \sin(2\pi t)$  (m/s). **Suy ra (a) đúng.**
- (b) Sai;  $s'' = f''(t) = -2\pi^2 \cdot \cos(2\pi t)$  (m/s<sup>2</sup>). **Suy ra (b) sai.**
- (c) Đúng;  $v(t) = -\pi \sin(2\pi t) \leq \pi$  (m/s), vì  $-1 \leq \sin(2\pi t) \leq 1, \forall t \geq 0$ . **Suy ra (c) đúng.**
- (d) Đúng; Vì  $-1 \leq \cos(2\pi t) \leq 1, \forall t \geq 0$  nên  $a(t) = f''(t) = -2\pi^2 \cdot \cos(2\pi t) \leq 2\pi^2$  (m/s<sup>2</sup>). **Suy ra (d) đúng.**

**Câu 22. (VD)** Một chất điểm chuyển động trong 20 giây đầu tiên có phương trình  $s(t) = \frac{1}{12}t^4 - t^3 + 6t^2 + 10t$ , trong đó  $t > 0$  với  $t$  tính bằng giây (s) và  $s(t)$  tính bằng mét (m). Hỏi tại thời điểm gia tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất thì vận tốc của vật bằng bao nhiêu?

#### Lời giải

Vận tốc của chuyển động là  $v(t) = s'(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 12t + 10$ .

Gia tốc của chuyển động là  $a(t) = v'(t) = t^2 - 6t + 12 = (t-3)^2 + 3$ .

Vậy gia tốc đạt giá trị nhỏ nhất khi  $t = 3$ . Khi đó vận tốc của vật bằng  $v(3) = 28$  (m/s).

**Đáp án: 28**

**Câu 23. (VD)** Một vật chuyển động theo quy luật  $s = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 9t$ , với  $t$  (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và  $s$  (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Quãng đường vật đi được tính từ lúc bắt đầu chuyển động đến lúc vật đạt vận tốc nhỏ nhất bằng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

#### Lời giải

Ta có:  $v = s'(t) = t^2 - 2t + 9 = (t-1)^2 + 8 \geq 8 \Rightarrow v \geq 8$ .

Do đó vật đạt vận tốc nhỏ nhất bằng 8 khi  $t = 1$ .

Vậy quãng đường vật đi được là  $s(1) = \frac{1}{3}(1)^3 - (1)^2 + 9 \cdot 1 = \frac{25}{3} \approx 8,33$  m.

**Đáp án: 8,33**

**Câu 24. (VD)** Một chất điểm chuyển động có phương trình  $s = -t^3 + t^2 + t + 4$  ( $t$  là thời gian tính bằng giây). Gia tốc của chuyển động tại thời điểm vận tốc đạt giá trị lớn nhất là

**Lời giải**

Vận tốc của chất điểm có phương trình là:  $v = s' = -3t^2 + 2t + 1$ .

Vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất khi  $t = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{3}$ .

Gia tốc của chất điểm có phương trình là:  $s'' = -6t + 2$ .

Tại thời điểm vận tốc đạt giá trị lớn nhất thì gia tốc bằng  $s''\left(\frac{1}{3}\right) = 0$ .

**Đáp án: 0**

**Câu 25. (VD)** Một con lắc lò xo dao động điều hoà theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát, có phương trình chuyển động  $x = 4 \cos\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) + 4$  (cm), trong đó  $t$  là thời gian tính bằng giây.

Tìm thời điểm mà vận tốc tức thời của con lắc bằng  $0$  (cm/s) là  $t = \frac{a}{b} + k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), trong đó

$a, b$  là các số nguyên và phân số  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Tính tổng  $a + b$ ?

**Lời giải**

Ta có:  $v(t) = x' = -4\pi \sin\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right)$ .

Thời điểm mà vận tốc tức thời của con lắc bằng 0 nghĩa là  $v(t) = 0$

$$\Leftrightarrow -4\pi \sin\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \pi t - \frac{2\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} + k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy các thời điểm mà vận tốc tức thời của con lắc bằng 0 là  $t = \frac{2}{3} + k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

Suy ra  $a = 2, b = 3$ , nên  $a + b = 5$ .

**Đáp án: 5**

**Câu 26. (VD)** Trong 18 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình  $s(t) = -t^3 + 18t^2 + t + 3$ , trong đó  $t$  tính bằng giây và  $s$  tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu mét trên giây trong 18 giây đầu tiên đó?

**Lời giải**

**Trả lời: 109**

Ta có vận tốc tức thời là  $s'(t) = -3t^2 + 36t + 1$ . Lập bảng biến thiên của hàm số  $s'(t)$  ta có vận tốc tức thời đạt giá trị lớn nhất bằng 109 m/s.

**Loại 2: Ứng dụng thực tế khác**

**Câu 27. (VD)** Trong 200 gam dung dịch muối nồng độ 15%, giả sử thêm vào dung dịch  $x$  (gam) muối tinh khiết và được dung dịch có nồng độ  $f(x)\%$ .

a) Hàm số  $f(x) = \frac{100(x+200)}{x+30}$ .

b) Đạo hàm của hàm số luôn nhận giá trị âm trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

c) Thêm càng nhiều gam muối tinh khiết thì nồng độ phần trăm càng tăng và không vượt quá 100%.

d) Giới hạn của  $f(x)$  khi  $x$  dần đến dương vô cực bằng 100.

**Lời giải**

| Ý       | a)       | b)       | c)       | d)       |
|---------|----------|----------|----------|----------|
| Kết quả | <b>S</b> | <b>S</b> | <b>Đ</b> | <b>Đ</b> |

a) Trong 200 gam dung dịch muối nồng độ 15% có  $200 \cdot \frac{15}{100} = 30$  (gam) muối tinh khiết. Khi thêm  $x$  (gam) muối tinh khiết vào 200 gam dung dịch muối nồng độ 15% thì có  $(x+30)$  (gam) muối tinh khiết. Khi đó, ta có hàm số là

$$f(x) = \frac{100(x+30)}{x+200}. \text{ Suy ra a) sai.}$$

b) Ta có  $f'(x) = \frac{17000}{(x+200)^2} > 0, \forall x \in (0; +\infty)$ . Suy ra b) sai.

c) Vì  $f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$  nên khi  $x$  tăng thì  $f(x)$  tăng. Nghĩa là khi thêm càng nhiều gam muối tinh khiết thì dung dịch có nồng độ phần trăm càng tăng.

Vì  $x+30 < x+200$  với mọi  $x \in (0; +\infty)$  nên  $\frac{x+30}{x+200} < 1$  dẫn đến  $f(x) = \frac{100(x+30)}{x+200} < 100$ .

Nghĩa là nồng độ phần trăm không vượt quá 100% khi cho thêm nhiều gam muối tinh khiết vào. **Suy ra c) đúng.**

d) Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{100(x+30)}{x+200} = 100. \text{ Suy ra d) đúng.}$$

## ỨNG DỤNG THỰC TẾ ĐẠO HÀM VÀ KHẢO SÁT HÀM SỐ

### DẠNG 2: ỨNG DỤNG THỰC TẾ TÍNH ĐƠN ĐIỀU VÀ CỰC TRỊ HÀM SỐ

#### I. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

##### 1. Định nghĩa

Với  $K$  là khoảng hay đoạn hoặc nửa khoảng.

Giả sử hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $K$ .

- ♦ Hàm số  $y = f(x)$  **đồng biến** (tăng) trên  $K$  nếu với mọi cặp  $x_1, x_2$  thuộc  $K$  mà  $x_1$  nhỏ hơn  $x_2$  thì  $f(x_1)$  nhỏ hơn  $f(x_2)$ , tức là  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ;
- ♦ Hàm số  $y = f(x)$  **nghịch biến** (giảm) trên  $K$  nếu với mọi cặp  $x_1, x_2$  thuộc  $K$  mà  $x_1$  nhỏ hơn  $x_2$  thì  $f(x_1)$  lớn hơn  $f(x_2)$ , tức là  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ .

Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến hay nghịch biến trên  $K$  được gọi chung là **đơn điệu** trên  $K$ .

##### 2. Định lý

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $K$ .

- ♦ Nếu  $f'(x) > 0$  với mọi  $x$  thuộc  $K$  thì hàm số  $f(x)$  đồng biến trên  $K$ .
- ♦ Nếu  $f'(x) < 0$  với mọi  $x$  thuộc  $K$  thì hàm số  $f(x)$  nghịch biến trên  $K$ .

##### Định lý mở rộng

- ♦ Nếu  $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$  (dấu "=" xảy ra tại một số hữu hạn điểm) thì hàm số đồng biến trên  $K$ .
- ♦ Nếu  $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$  (dấu "=" xảy ra tại một số hữu hạn điểm) thì hàm số nghịch biến trên  $K$ .

##### 3. Quy tắc xét tính đơn điệu của hàm số

**Bước 1:** Tìm tập xác định. Tính  $f'(x)$ .

**Bước 2:** Tìm các điểm tại đó  $f'(x)$  bằng 0 hoặc  $f'(x)$  không xác định.

**Bước 3:** Sắp xếp các điểm đó theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

**Bước 4:** Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

#### II. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

##### 1. Định nghĩa

**Định nghĩa 1.** Hàm số  $f(x)$  xác định trên tập  $D \subset \mathbb{R}$ .

- ✓ Điểm  $x_0 \in D$  được gọi là điểm cực đại của hàm số  $f(x)$  nếu tồn tại một khoảng  $(a; b) \subset D$  sao cho  $x_0 \in (a; b)$  và  $f(x) < f(x_0), \forall x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$ .
- ✓ Điểm  $x_0 \in D$  được gọi là điểm cực tiểu của hàm số  $f(x)$  nếu tồn tại một khoảng  $(a; b) \subset D$  sao cho  $x_0 \in (a; b)$  và  $f(x) > f(x_0), \forall x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$ .

##### 2. Điều kiện cần và đủ để hàm số có cực trị

**Định lý 1 (Điều kiện cần).** Nếu hàm số  $f(x)$  đạt cực trị tại điểm  $x_0$  và hàm số  $f$  có đạo hàm tại điểm  $x_0$ , thì  $f'(x_0) = 0$ .

Tuy nhiên hàm số có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm, chẳng hạn với hàm  $y = |x|$ , đạt cực trị tại  $x = 0$  nhưng không có đạo hàm tại đó.

**Định lý 2 (Điều kiện đủ).** Ta có

- +) Nếu  $f'(x) < 0, \forall x \in (a; x_0)$  và  $f'(x) > 0, \forall x \in (x_0; b)$  thì hàm số  $f(x)$  đạt cực tiểu tại điểm  $x_0$ .
- +) Nếu  $f'(x) > 0, \forall x \in (a; x_0)$  và  $f'(x) < 0, \forall x \in (x_0; b)$  thì hàm số  $f(x)$  đạt cực đại tại điểm  $x_0$ .

Tức là, nếu đạo hàm của hàm số  $y = f(x)$  đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua  $x_0$

|         |           |          |           |
|---------|-----------|----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $x_0$    | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$      | $+$       |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $y_{CT}$ | $+\infty$ |

Ta nói, đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là  $M(x_0; y_{CT})$ .

|         |           |          |           |
|---------|-----------|----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $x_0$    | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$      | $-$       |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $y_{CD}$ | $-\infty$ |

Nếu đạo hàm của hàm số  $y = f(x)$  đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua  $x_0$

Ta nói, đồ thị hàm số có điểm cực đại là  $M(x_0; y_{CD})$ .

**Chú ý:** Không cần xét có hay không đạo hàm tại  $x_0$ .

## B - BÀI TẬP

- Câu 1.** (TH) Giả sử số dân của một thành phố sau  $t$  năm kể từ năm 2010 được mô tả bởi hàm số  $N(t) = \frac{3+15t}{-t+2}$ ,  $t \geq 0$ , trong đó  $N(t)$  được tính bằng triệu người. Biết dân số của thành phố đó luôn tăng nhưng sẽ không vượt quá bao nhiêu? (Viết câu trả lời theo đơn vị triệu người)

**Lời giải**

Ta có:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{3+15t}{-t+2} = 15$ .

Vậy dân số của thành phố luôn tăng nhưng sẽ không vượt quá 15 triệu người.

- Câu 2.** (TH) Một xưởng sản xuất được  $x$  kilogram sản phẩm trong ngày thì chi phí trung bình (tính bằng nghìn đồng) cho một sản phẩm được cho bởi công thức:  $C(x) = \frac{50x+2000}{x}$ ,  $x > 0$ . Biết chi phí trung bình cho một sản phẩm luôn giảm nhưng sẽ không thấp hơn bao nhiêu?? (Viết câu trả lời theo đơn vị nghìn đồng)

**Lời giải**

Ta có:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{50x+2000}{x} = 50$ .

Vậy chi phí trung bình cho một sản phẩm luôn giảm nhưng sẽ không thấp hơn 50 nghìn đồng.

- Câu 3.** (VD) Giả sử chiều cao (tính bằng  $cm$ ) của một giống cây trồng (trong vòng một số tháng nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số

$$f(t) = \frac{200}{1+4e^{-t}}, \quad t \geq 0.$$

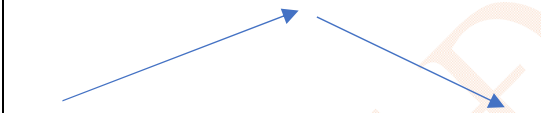
Trong đó thời gian  $t$  được tính bằng tháng kể từ khi hạt bắt đầu nảy mầm. Khi đó đạo hàm  $f'(t)$  sẽ biểu thị tốc độ tăng chiều cao của giống cây đó. Hỏi sau khi hạt giống bắt đầu nảy mầm thì sau bao nhiêu tháng tốc độ tăng chiều cao của cây là lớn nhất?

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } f(t) = \frac{200}{1+4e^{-t}} \Rightarrow f'(t) = 200 \cdot \frac{-4e^{-t} \cdot (-1)}{(1+4e^{-t})^2} = 200 \cdot \frac{4e^{-t}}{(1+4e^{-t})^2}$$

$$f''(t) = 200 \cdot \frac{-4e^{-t}(1+4e^{-t})^2 - 2(1+4e^{-t}) \cdot (-4e^{-t}) \cdot 4e^{-t}}{(1+4e^{-t})^4} = 200 \cdot \frac{-4e^{-t} \cdot (1+4e^{-t})(1+4e^{-t} - 8e^{-t})}{(1+4e^{-t})^4}$$

$$= 200 \cdot \frac{-4e^{-t} \cdot (1+4e^{-t})(1-4e^{-t})}{(1+4e^{-t})^4} \Rightarrow f''(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-t} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow t = -\ln\left(\frac{1}{4}\right) = \ln 4 \approx 1,38$$

|          |                                                                                    |         |           |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------|---------|-----------|
| $t$      | 0                                                                                  | $\ln 4$ | $+\infty$ |
| $f''(t)$ | +                                                                                  | 0       | -         |
| $f'(t)$  |  |         |           |

Vậy sau khi nảy mầm khoảng  $\ln 4 \approx 1,38$  tháng thì cây có tốc độ tăng chiều cao lớn nhất.

**Câu 4. (VD)** Giả sử tăng cân nặng ( tính bằng  $kg$  ) của một giống vật nuôi ( trong vòng một số tháng nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số

$$f(t) = \frac{150}{1+3e^{-t}}, \quad t \geq 0$$

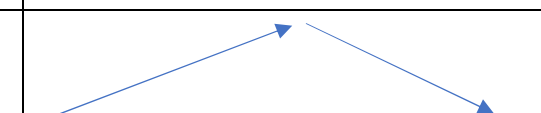
Trong đó thời gian  $t$  được tính bằng tháng kể từ khi vật nuôi đó bắt đầu sinh ra. Khi đó đạo hàm  $f'(t)$  sẽ biểu thị tốc độ tăng cân nặng của loài cây đó. Hỏi sau khi vật nuôi sinh ra thì sau bao nhiêu tháng tốc độ tăng cân nặng của vật nuôi là nhanh nhất?

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } f(t) = \frac{150}{1+3e^{-t}} \Rightarrow f'(t) = 150 \cdot \frac{-3e^{-t} \cdot (-1)}{(1+3e^{-t})^2} = 150 \cdot \frac{3e^{-t}}{(1+3e^{-t})^2}$$

$$f''(t) = 150 \cdot \frac{-3e^{-t}(1+3e^{-t})^2 - 2(1+3e^{-t}) \cdot (-3e^{-t}) \cdot 3e^{-t}}{(1+3e^{-t})^4} = 150 \cdot \frac{-3e^{-t} \cdot (1+3e^{-t})(1+3e^{-t} - 6e^{-t})}{(1+3e^{-t})^4}$$

$$= 150 \cdot \frac{-3e^{-t} \cdot (1+3e^{-t})(1-3e^{-t})}{(1+3e^{-t})^4} \Rightarrow f''(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-t} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow t = -\ln\left(\frac{1}{3}\right) = \ln 3 \approx 1,09$$

|          |                                                                                      |         |           |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------|-----------|
| $t$      | 0                                                                                    | $\ln 3$ | $+\infty$ |
| $f''(t)$ | +                                                                                    | 0       | -         |
| $f'(t)$  |  |         |           |

Vậy sau khi sinh khoảng  $\ln 3 \approx 1,09$  tháng thì vật nuôi có tốc độ tăng cân nhanh nhất.

**Câu 5. (TH)** Giả sử số dân của một thị trấn sau  $t$  năm kể từ năm 2000 được mô tả bởi hàm số

$$N(t) = \frac{25t+10}{t+5}, \quad t \geq 0,$$

trong đó  $N(t)$  được tính bằng nghìn người.

a) Tính số dân của thị trấn đó vào các năm 2000 và 2015.

b) Tính đạo hàm  $N(t)$  và  $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$ . Từ đó, giải thích tại sao số dân của thị trấn đó luôn tăng nhưng sẽ không vượt quá một ngưỡng nào đó.

#### Lời giải

(a) Số dân vào năm 2000 ( $t=0$ ) của thị trấn đó là:  $N(0)=2$  nghìn người.

Năm 2015, sau 15 năm ( $t=15$ ) kể từ năm 2000 số dân của thị trấn đó là:  $N(15)=19250$  người.

$$(b) \text{ Ta có } N'(t) = \frac{115}{(t+5)^2} \text{ và } \lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25t+10}{t+5} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25+\frac{10}{t}}{1+\frac{5}{t}} = 25.$$

Vì  $N'(t) > 0, \forall t > 0$  nên hàm số  $N(t)$  là hàm đồng biến. Hơn nữa  $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = 25$ , do đó dân số của thị trấn đó luôn tăng nhưng không vượt quá 25 nghìn người.

#### Câu 6.

(VD) Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số  $f(t) = \frac{5000}{1+5e^{-t}}, t \geq 0$ , trong đó thời gian  $t$  được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm  $f'(t)$  sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất?

#### Lời giải

Ta có tốc độ bán hàng là

$$f'(t) = \left( \frac{5000}{1+5e^{-t}} \right)' = -\frac{5000(1+5e^{-t})'}{(1+5e^{-t})^2} = \frac{-5000.5.(-1).e^{-t}}{(1+5e^{-t})^2} = \frac{25000e^{-t}}{(1+5e^{-t})^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm ta có:

$$1+5e^{-t} \geq 2\sqrt{1.5e^{-t}} \Rightarrow (1+5e^{-t})^2 \geq 4.5e^{-t} = 20e^{-t}$$

$$\text{Khi đó } f'(t) = \frac{25000e^{-t}}{(1+5e^{-t})^2} \leq \frac{25000e^{-t}}{20e^{-t}} = 1250.$$

Dấu “=” xảy ra khi  $1 = 5e^{-t} \Leftrightarrow e^t = 5 \Leftrightarrow t = \ln 5 \approx 1,61$ .

Vậy sau 1,61 năm sau khi phát hành tốc độ bán hàng là lớn nhất.

#### Câu 7.

(TH) Sự ảnh hưởng khi sử dụng một loại độc tố với vi khuẩn  $X$  được một nhà sinh học mô tả bởi hàm số  $P(t) = \frac{t+1}{t^2+t+4}$ , trong đó  $P(t)$  là số lượng vi khuẩn sau  $t$  sử dụng độc tố. Vào thời điểm nào thì số lượng vi khuẩn  $X$  bắt đầu giảm?

A. Ngay từ lúc bắt đầu sử dụng độc tố.

B. Sau 0,5 giờ.

C. Sau 2 giờ.

D. Sau 1 giờ.

#### Câu 8.

(TH) Thể tích nước của một bể bơi sau  $t$  phút bơm tính theo công thức  $V(t) = \frac{1}{100} \left( 30t^3 - \frac{t^4}{4} \right)$

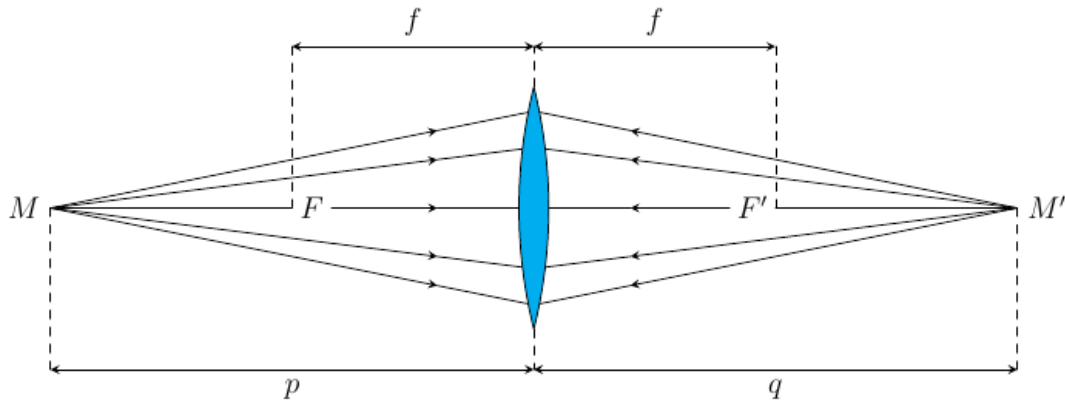
$$(0 \leq t \leq 90)$$

Tốc độ bơm nước tại thời điểm  $t$  được tính bởi  $v(t) = V'(t)$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng.

A. Tốc độ bơm giảm từ phút 60 đến phút thứ 90.

- B. Tốc độ bơm luôn giảm.  
 C. Tốc độ bơm tăng từ phút 0 đến phút thứ 75.  
 D. Cả A, B, C đều sai.

**Câu 9.** (VD) Xét một thấu kính hội tụ có tiêu cự  $f$ . Khoảng cách  $p$  từ vật đến thấu kính liên hệ với khoảng cách  $q$  từ ảnh đến thấu kính bởi hệ thức:  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$ .



- a) Viết công thức tính  $q = g(p)$  như một hàm số của biến  $p \in (f; +\infty)$ .  
 b) Tính các giới hạn  $\lim_{p \rightarrow +\infty} g(p)$ ,  $\lim_{p \rightarrow f^+} g(p)$  và giải thích ý nghĩa các kết quả này.  
 c) Lập bảng biến thiên của hàm số  $q = g(p)$  trên khoảng  $(f; +\infty)$ .

**Lời giải**

(a) Ta có  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow q = \frac{pf}{p-f}$ . Do đó,  $q = g(p) = \frac{pf}{p-f}$  với  $p \in (f; +\infty)$ .

(b)  $\lim_{p \rightarrow +\infty} g(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{pf}{p-f} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{f}{1 - \frac{f}{p}} = f$ ,  $\lim_{p \rightarrow f^+} g(p) = \lim_{p \rightarrow f^+} \frac{pf}{p-f} = +\infty$ .

Ý nghĩa của  $\lim_{p \rightarrow +\infty} g(p) = f$ : Khoảng cách từ vật đến thấu kính tiến ra vô cùng thì khoảng cách từ ảnh đến thấu kính xấp xỉ tiêu cự.

Ý nghĩa của  $\lim_{p \rightarrow f^+} g(p) = +\infty$ : Khoảng cách từ vật đến thấu kính tiến gần về tiêu cự  $f$  thì khoảng cách từ ảnh đến thấu kính là càng lớn.

(c) Ta có  $q' = g'(p) = -\frac{f^2}{(p-f)^2} < 0$  với mọi  $p \in (f; +\infty)$  nên hàm số nghịch biến trên  $(f; +\infty)$ .

Bảng biến thiên

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | $f$       | $+\infty$ |
| $g'(p)$ | —         |           |
| $g(p)$  | $+\infty$ | $f$       |

**Câu 10.** (TH) Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục  $Ox$ . Toạ độ của chất điểm tại thời điểm  $t$  được xác định bởi hàm số  $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$  với  $t \geq 0$ . Khi đó  $x'(t)$  là vận tốc của chất điểm

tại thời điểm  $t$ , kí hiệu  $v(t); v'(t)$  là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm  $t$ , kí hiệu  $a(t)$ .

a) Hàm  $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$

b) Hàm  $a(t) = 6t - 12$

c) Trong khoảng từ  $t = 0$  đến  $t = 2$  thì vận tốc của chất điểm tăng

d) Từ  $t = 2$  trở đi thì vận tốc của chất điểm giảm

**Câu 11. (TH)** Giả sử một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho toạ độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm  $t$  (giây) là  $y = t^3 - 12t + 3, t \geq 0$ .

a) Hàm vận tốc là:  $v(t) = 3t^2 - 12, t \geq 0$

b) Hạt chuyển động xuống dưới khi  $t > 2$

c) Quãng đường hạt đi được trong khoảng thời gian  $0 \leq t \leq 3$  là  $9m$

d) Khi  $t > 0$  thì hạt tăng tốc.

**Câu 12. (VD)** Dân số của một quốc gia sau  $t$  (năm) kể từ năm 2023 được ước tính bởi công thức:

$N(t) = 100e^{0,012t}$  ( $N(t)$  được tính bằng triệu người,  $0 \leq t \leq 50$ )

a) Dân số của quốc gia vào năm 2030 là: 108, 763 (triệu người)

b) Dân số của quốc gia vào năm 2035 là: 125,488 (triệu người)

c) Xem  $N(t)$  là hàm số của biến số  $t$  xác định trên đoạn  $[0; 50]$ . Khi đó hàm số  $N(t)$  đồng biến trên đoạn  $[0; 50]$ .

d) Đạo hàm của hàm số  $N(t)$  biểu thị tốc độ tăng dân số của quốc gia đó (tính bằng triệu người/năm). Vậy vào năm 2040 thì tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/ năm.

**Câu 13. (TH)** Một vật chuyển động thẳng được cho bởi phương trình:  $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 9t$ , trong đó  $t$  tính bằng giây và  $s$  tính bằng mét. Khi đó:

a) Vận tốc của vật tại các thời điểm  $t = 3$  giây là  $v(3) = 1m/s$ .

b) Quãng đường vật đi được từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi vật đứng yên là  $162(m)$ .

c) Gia tốc của vật tại thời điểm  $t = 3$  giây:  $a(3) = 2m/s^2$ .

d) Trong 9 giây đầu tiên, vật tăng tốc khi  $t \in [0; 4]$ .

**Lời giải**

(a)  $v(t) = s'(t) = -t^2 + 8t + 9 \Rightarrow v(3) = 24m/s$ .

(b) Vật đứng yên khi  $v(t) = 0 \Leftrightarrow -t^2 + 8t + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1(ktm) \\ t = 9(tm) \end{cases}$ .

Quãng đường vật chuyển động được đến thời điểm  $t = 9$  là:

$s(t) = -\frac{1}{3}.9^3 + 4.9^2 + 9.9 = 162(m)$ .

c) Gia tốc của vật:  $a(t) = s''(t) = -2t + 8$ .

( )

Gia tốc của vật tại thời điểm  $t = 3$  giây:  $a(3) = 2m/s^2$ .

(d) Xét hàm  $v(t) = -t^2 + 8t + 9$ ;  $v'(t) = -2t + 8$

$v'(t) = 0 \Rightarrow t = 4$

Bảng biến thiên của hàm số  $v(t) = -t^2 + 8t + 9$  với  $t \in [0; 9]$ :

|         |   |    |   |
|---------|---|----|---|
| $t$     | 0 | 4  | 9 |
| $v'(t)$ | + | 0  | - |
| $v(t)$  | 9 | 25 | 0 |

Trong 9 giây đầu tiên, vật tăng tốc khi  $t \in [0; 4]$ .

**Câu 14. (VD)** Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong  $t$  giờ được cho bởi hàm số có công thức  $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$  ( $mg/L$ ). Khi đó

a) Nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau 3 giờ là  $c(3) = \frac{3}{10}(mg/L)$ .

b) Đạo hàm của hàm số  $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$  là  $c'(t) = \frac{1 - t^2}{(t^2 + 1)^2}$ .

c) Nồng độ thuốc trong máu bệnh nhân tăng trong khoảng  $t \in (0; 2)$ .

d) Nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất khi  $t = \frac{1}{2}$ .

**Lời giải**

(a) Xét hàm số  $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$ , ( $t > 0$ )  $\Rightarrow c(3) = \frac{3}{3^2 + 1} = \frac{3}{10}$ .

(b)  $c'(t) = \frac{t^2 + 1 - 2t^2}{(t^2 + 1)^2} = \frac{1 - t^2}{(t^2 + 1)^2}$ .

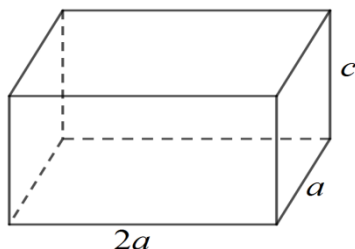
(c)  $c'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$ .

Bảng biến thiên của hàm số  $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$  ( $t > 0$ ).

|         |   |               |           |
|---------|---|---------------|-----------|
| $t$     | 0 | 1             | $+\infty$ |
| $c'(t)$ | + | 0             | -         |
| $c(t)$  | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0         |

(d) Với  $t = 1$  giờ thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất.

**Câu 15. (VD)** Ông An muốn xây một cái bể chứa nước lớn dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng  $288m^3$ . Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là  $500000$  đồng/ $m^2$ . Ba kích thước của bể được mô tả như hình vẽ dưới ( $a(m) > 0, c(m) > 0$ ).



Nếu ông An biết xác định các kích thước của bể hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất và (Biết độ dày thành bể và đáy bể không đáng kể). Khi đó:

a) Diện tích các mặt cần xây là  $S = 2a^2 + 4ac + 2ac = 2a^2 + 6ac$ .

b)  $2a^2c = 288$ .

c) Diện tích các mặt cần xây nhỏ nhất là  $216m$ .

d) Chi phí thấp nhất để xây dựng bể đó là 108 triệu đồng.

#### Lời giải

(a) Từ hình vẽ ta có ba kích thước của bể là  $a, 2a, c$ .

Ta có diện tích các mặt cần xây là  $S = 2a^2 + 4ac + 2ac = 2a^2 + 6ac$ .

(b) Thể tích bể  $V = a \cdot 2a \cdot c = 2a^2c = 288$  (1)

(c) Từ (1)  $\Rightarrow c = \frac{144}{a^2}$  nên  $S = 2a^2 + 6a \cdot \frac{144}{a^2} = 2a^2 + \frac{864}{a}$ .

Xét hàm số  $S(a) = 2a^2 + \frac{864}{a} \Rightarrow S'(a) = 4a - \frac{864}{a^2}$ .

$S'(a) = 0 \Leftrightarrow 4a - \frac{864}{a^2} = 0 \Leftrightarrow a^3 = 216 \Leftrightarrow a = 6$

Bảng biến thiên của hàm số  $S(a) = 2a^2 + \frac{864}{a} (a > 0)$

|         |           |     |           |
|---------|-----------|-----|-----------|
| $a$     | 0         | 6   | $+\infty$ |
| $S'(a)$ | -         | 0   | +         |
| $S(a)$  | $+\infty$ | 216 | $+\infty$ |

d)  $S_{\min} = 216m^2$ , khi đó chi phí thấp nhất là  $216 \cdot 500000 = 108$  triệu đồng.

( )

**Câu 16.** (VD) Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số  $f(t) = \frac{5000}{1 + 5e^{-t}}, t \geq 0$  trong đó thời gian  $t$  được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm  $f'(t)$  sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất?

A. 1,5 năm.

B. 1,4 năm.

C. 2,1 năm.

D. 1,6 năm.

#### Lời giải

Ta có:  $f'(t) = \frac{-5000(1 + 5e^{-t})'}{(1 + 5e^{-t})^2} = \frac{25000e^{-t}}{(1 + 5e^{-t})^2}$

Tốc độ bán hàng là lớn nhất khi  $f'(t)$  lớn nhất.

Đặt  $h(t) = \frac{25000e^{-t}}{(1 + 5e^{-t})^2}$ .

$$\begin{aligned}
 h'(t) &= \frac{-25000e^{-t}(1+5e^{-t})^2 - 2 \cdot (-5e^{-t}) \cdot (1+5e^{-t}) \cdot 25000e^{-t}}{(1+5e^{-t})^4} \\
 &= \frac{-25000e^{-t}(1+5e^{-t})(1+5e^{-t}-10e^{-t})}{(1+5e^{-t})^4} = \frac{-25000e^{-t}(1-5e^{-t})}{(1+5e^{-t})^3} \\
 h'(t) &= 0 \Leftrightarrow \frac{-25000e^{-t}(1-5e^{-t})}{(1+5e^{-t})^3} = 0 \Leftrightarrow 1-5e^{-t} = 0 \Leftrightarrow e^{-t} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow t = \ln 5 (\text{tm})
 \end{aligned}$$

Ta có bảng biến thiên với  $t \in [0; +\infty)$ :

|         |   |         |           |
|---------|---|---------|-----------|
| $t$     | 0 | $\ln 5$ | $+\infty$ |
| $h'(t)$ |   | +       | 0         |
| $h(t)$  |   |         | 1250      |

Vậy sau khi phát hành khoảng  $\ln 5 \approx 1,6$  năm thì thị tốc độ bán hàng là lớn nhất.

- Câu 17. (VD)** Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục  $Ox$ . Toạ độ của chất điểm tại thời điểm  $t$  được xác định bởi hàm số  $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$  với  $t \geq 0$ . Khi đó  $x'(t)$  là vận tốc của chất điểm tại thời điểm  $t$ , kí hiệu  $v(t); v'(t)$  là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm  $t$ . Trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm tăng, trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm giảm?
- A. Vận tốc tăng trong khoảng thời gian  $t \in (3; 10)$  và giảm trong khoảng thời gian  $t \in (1; 3)$ .  
 B. Vận tốc giảm trong khoảng thời gian  $t \in (2; 10)$  và tăng trong khoảng thời gian  $t \in (0; 2)$ .  
 C. Vận tốc tăng trong khoảng thời gian  $t \in (1; 2)$  và giảm trong khoảng thời gian  $t \in (0; 1)$ .  
D. Vận tốc tăng trong khoảng thời gian  $t \in (2; 10)$  và giảm trong khoảng thời gian  $t \in (0; 2)$ .

**Lời giải**

$$v(t) = x'(t) = 3t^2 - 12t + 9$$

$$\text{Xét } v(t) = 3t^2 - 12t + 9$$

$$\Rightarrow v'(t) = 6t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

Bảng biến thiên

|         |   |   |           |
|---------|---|---|-----------|
| $t$     | 0 | 2 | $+\infty$ |
| $v'(t)$ |   | - | 0         |
| $v(t)$  | 9 |   | -3        |

Vận tốc tăng trong khoảng thời gian  $t \in (2; 10)$  và giảm trong khoảng thời gian  $t \in (0; 2)$ .

- Câu 18. (VD)** Một hợp tác xã nuôi cá thí nghiệm trong hồ. Người ta thấy rằng nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có  $n$  con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng  $P(n) = 480 - 20n$  (gam). Hỏi phải thả số lượng cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ thuộc khoảng nào dưới đây để cân nặng trung bình của số cá đó tăng?
- A.  $(0; 20)$ .      B.  $(0; 30)$ .      C.  $(12; 50)$ .      D.  $(0; 12)$ .

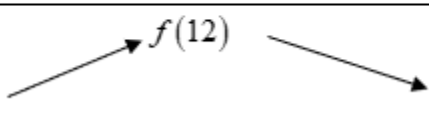
**Lời giải**

Sau một vụ, số cá trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ có cân nặng trung bình là:

$$f(n) = nP(n) = 480n - 20n^2 \text{ (gam)}.$$

$$f'(n) = 480 - 40n = 0 \Leftrightarrow n = 12$$

Bảng biến thiên:

|         |                                                                                   |    |           |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------|----|-----------|
| $n$     | 0                                                                                 | 12 | $+\infty$ |
| $f'(n)$ | +                                                                                 | 0  | -         |
| $f(n)$  |  |    |           |

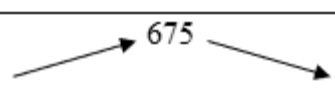
Từ bảng biến thiên, suy ra trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ, số cá cần thả trong khoảng  $(0;12)$

- Câu 19. (VD)** Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ  $t$  là  $f(t) = 45t^2 - t^3, t = 0, 1, 2, \dots, 25$ . Nếu coi  $f(t)$  là hàm số xác định trên đoạn  $[0;25]$  thì đạo hàm  $f'(t)$  được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm  $t$ . Xác định khoảng thời gian mà tốc độ truyền bệnh giảm?
- A.  $(0;15)$ .      B.  $(0;10)$ .      C.  $(15;25)$ .      D.  $(10;25)$ .

**Lời giải**

$$f'(t) = 90t - 3t^2; f''(t) = 90 - 6t, f''(t) = 0 \Leftrightarrow t = 15$$

Bảng biến thiên

|          |                                                                                     |    |    |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------|----|----|
| $t$      | 0                                                                                   | 15 | 25 |
| $f''(t)$ | +                                                                                   | 0  | -  |
| $f'(t)$  |  |    |    |

Vậy khoảng thời gian  $(15;25)$  ngày thì tốc độ truyền bệnh giảm

- Câu 20. (VD)** Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt khoảng cách là 300 km. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là  $v$  (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong  $t$  giờ được cho bởi công thức  $E(v) = cv^3t$ , trong đó  $c$  là hằng số và  $E$  tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên nằm ở khoảng nào thì năng lượng tiêu hao của cá giảm?
- A.  $(6;10)$ .      B.  $(6;12)$ .      C.  $(6;9)$ .      D.  $(9;20)$ .

**Lời giải**

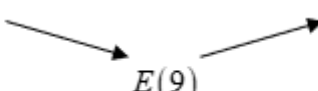
Khi bơi ngược dòng vận tốc của cá là:  $v - 6$  (km/h)

Thời gian để cá vượt khoảng cách 300 km là  $t = \frac{300}{v-6} (v > 6)$

Năng lượng tiêu hao của cá khi vượt khoảng cách 300km là:  $E(v) = cv^3 \frac{300}{v-6} = 300c \frac{v^3}{v-6}$

$$E'(v) = 600cv^2 \frac{v-9}{(v-6)^2}; E'(v) = 0 \Leftrightarrow v = 9 \text{ do } (v > 6)$$

Bảng biến thiên

|         |                                                                                   |   |           |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------|---|-----------|
| $v$     | 6                                                                                 | 9 | $+\infty$ |
| $E'(v)$ | -                                                                                 | 0 | +         |
| $E(v)$  |  |   |           |

Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên nằm ở khoảng  $(6;9)$  thì năng lượng tiêu hao của cá giảm

**Câu 21. (TH)** Một vật chuyển động theo quy luật  $s(t) = -2t^3 + 24t^2 + 9t - 3$  với  $t$  (giây) là khoảng thời gian từ lúc bắt đầu chuyển động và  $s(t)$  (m) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vật chuyển động nhanh dần hay chậm dần.

#### Lời giải

Vận tốc chuyển động của vật được xác định theo công thức:  $v(t) = s'(t) = -6t^2 + 48t + 9$ .

Ta có  $v'(t) = -12t + 48$ ;  $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$ .

Từ đó ta có bảng biến thiên

|         |                                                                                    |   |    |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------|---|----|
| $t$     | 0                                                                                  | 4 | 10 |
| $v'(t)$ | +                                                                                  | 0 | -  |
| $v(t)$  |  |   |    |

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy: Từ thời điểm bắt đầu chuyển động đến thời điểm  $t = 4$  giây, vật chuyển động nhanh dần. Từ thời điểm  $t = 4$  giây đến thời điểm  $t = 10$  giây, vật chuyển động chậm dần.

**Câu 22. (TH)** Thể tích nước của một bể bơi sau  $t$  phút bơm được tính theo công thức

$V(t) = \frac{1}{100} \left( 30t^3 - \frac{t^4}{4} \right)$  với  $0 \leq t \leq 90$ . Tốc độ bơm nước ở thời điểm  $t$  được tính theo công

thức  $v(t) = V'(t)$ . Tìm thời điểm tốc độ bơm nước là lớn nhất và tính tốc độ bơm nước lớn nhất đó.

#### Lời giải

Ta có  $v(t) = V'(t) = \frac{1}{100} (90t^2 - t^3)$ .

$$v'(t) = \frac{1}{100} (180t - 3t^2).$$

$$v'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 60 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

|         |   |      |    |   |
|---------|---|------|----|---|
| $t$     | 0 | 60   | 90 |   |
| $v'(t)$ | 0 | +    | 0  | - |
| $v(t)$  | 0 | 1080 |    | 0 |

Từ bảng biến thiên ta thấy: Tốc độ bơm nước lớn nhất bằng 1080, tại thời điểm  $t = 60$  phút.

- Câu 23. (VD)** Một cửa hàng trung bình bán được 100 cái Tivi mỗi tháng với giá 14 triệu đồng một cái. Chủ cửa hàng nhận thấy rằng, nếu giảm giá bán mỗi cái 500 ngàn đồng thì số lượng tivi bán ra sẽ tăng thêm 10 cái mỗi tháng. Hỏi cửa hàng nên bán với giá bao nhiêu để doanh thu của hàng là lớn nhất?

#### Lời giải

Giả sử cần giảm giá bán mỗi cái tivi là  $x$  triệu đồng ( $x < 14$ ).

Do giảm giá bán mỗi cái 500 ngàn đồng thì số lượng tivi bán ra sẽ tăng thêm 10 cái mỗi tháng nên số lượng tivi bán ra tăng lên bây giờ là:  $\frac{10x}{0,5} = 20x$ .

Khi đó, doanh thu một tháng của cửa hàng là  $(100 + 20x) \cdot (14 - x) = -20x^2 + 180x + 1400$ .

Xét hàm số  $f(x) = -20x^2 + 180x + 1400$  ( $x < 14$ )

Ta có  $f'(x) = -40x + 180$ ;  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4,5$ .

Bảng biến thiên

|         |           |      |    |
|---------|-----------|------|----|
| $x$     | $-\infty$ | 4,5  | 14 |
| $f'(x)$ | +         | 0    | -  |
| $f(x)$  | $-\infty$ | 1805 | 0  |

Từ bảng biến thiên ta thấy: Để doanh thu của hàng đạt cao nhất thì giá bán mỗi cái tivi là  $14 - 4,5 = 9,5$  triệu đồng

- Câu 24. (TH)** Giả sử số lượng quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hóa bằng hàm số  $P(t) = \frac{25}{0,25 + e^{-0,75t}}$ , trong đó thời gian  $t$  được tính bằng giờ. Tốc độ sinh trưởng của quần thể nấm men ở thời điểm  $t$  được tính theo công thức  $P'(t)$ . Nêu nhận xét về sự tăng giảm của số lượng quần thể nấm men được nuôi cấy. Số lượng quần thể nấm men có thể tăng lên vô cùng được không?

#### Lời giải

Ta có  $P'(t) = \frac{18,75 \cdot e^{-0,75t}}{(0,25 + e^{-0,75t})^2} > 0, \forall t > 0$ . Suy ra số lượng quần thể nấm men được nuôi cấy luôn tăng.

Ta lại có  $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25}{0,25 + e^{-0,75t}} = 100$ . Do đó, số lượng quần thể nấm men tăng nhưng không vượt quá 100, nên không thể tăng lên vô cùng được.

- Câu 25. (TH)** Xét một chất điểm chuyển động trên một trục số nằm ngang, chiều dương từ trái sang phải (Hình 1). Giả sử vị trí  $s(t)$  (mét) của chất điểm trên trục số đã chọn tại thời điểm  $t$  (giây) được

cho bởi công thức  $s(t) = t^3 - 9t^2 + 15t, t \geq 0$ . Hỏi có bao nhiêu giá trị  $t$  nguyên để chất điểm chuyển động sang trái?



Hình 1

Lời giải

Trả lời: 3

Ta có: Vận tốc  $v(t) = s'(t) = (t^3 - 9t^2 + 15t)' = 3t^2 - 18t + 15$

Chất điểm chuyển động theo chiều âm (sang bên trái) khi

$$v(t) < 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 18t + 15 < 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-5) < 0 \Leftrightarrow 1 < t < 5$$

Do  $t \in \mathbb{Z}$  nên  $t \in \{2, 3, 4\}$

**Câu 26. (TH)** Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được đo bởi công thức  $G(x) = 0,25x^2(30 - x)$  trong đó  $x(\text{mg})$  và  $x > 0$  là lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân. Để huyết áp giảm nhiều nhất thì cần tiêm cho bệnh nhân một liều lượng bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$\text{Ta có: } G(x) = 0,25x^2(30 - x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{40}x^3$$

$$G'(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{40}x^2$$

$$G'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - \frac{3}{40}x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(\text{loại}) \\ x = 20(\text{t/m}) \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

| X       | 0 | 20  | $+\infty$ |
|---------|---|-----|-----------|
| $G'(x)$ |   | 0   | -         |
| $G(x)$  |   | 100 |           |

Dựa vào bảng biến thiên thì bệnh nhân cần tiêm một lượng thuốc 20mg

**Câu 27. (TH)** Kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam trong các năm từ 2010 đến 2017 có thể được tính xấp xỉ bằng công thức  $f(x) = 0,01x^3 - 0,04x^2 + 0,25x + 0,44$  (tỉ USD) với  $x$  là số năm tính từ 2010 đến 2017 ( $0 \leq x \leq 7$ ).

Theo: <https://infographics.vn/interactive-xuat-khau-rau-quadu-bao-bung-no-dat-4-ty-usd-trong-nam-2023/116220.vna>

a) Tính đạo hàm của hàm số  $y = f(x)$ .

b) Chứng minh rằng kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam tăng liên tục trong các năm từ 2010 đến 2017.

Lời giải

(a)  $f'(x) = 0,03x^2 - 0,08x + 0,25$ .

(b)  $f'(x) = 0,03x^2 - 0,08x + 0,25$  có  $a = 0,03 > 0$ ,  $\Delta = -0,0236 < 0$  suy ra  $f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ .

Do đó  $f'(x) > 0 \forall x \in [0; 7]$  hay hàm số đã cho đồng biến trên đoạn  $[0; 7]$ .

Vậy kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam tăng liên tục trong các năm từ 2010 đến 2017.

- Câu 28. (TH)** Một chuyển động thẳng được xác định bởi phương trình  $S(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 2$  với  $t > 0$ ,  $t$  tính bằng giây và  $S$  tính bằng mét. Trong khoảng thời gian nào vận tốc của vật tăng?  
**Đáp số:**

**Lời giải**

Ta có  $v(t) = S'(t) = t^2 - 6t + 5$ ,  $t > 0$ .

$$v'(t) = 2t - 6, \quad v'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 3.$$

Bảng biến thiên:

|         |   |    |           |
|---------|---|----|-----------|
| $t$     | 0 | 3  | $+\infty$ |
| $v'(t)$ |   | -  | 0         |
| $v(t)$  | 5 | -4 | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta thấy vận tốc tăng trong khoảng thời gian  $(3; +\infty)$ .

**Đáp số:**  $(3; +\infty)$ .

- Câu 29. (VD)** Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt khoảng cách là  $300 \text{ km}$ . Vận tốc dòng nước là  $6 \text{ km/h}$ . Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là  $v(\text{km/h})$  thì năng lượng tiêu hao của cá trong  $t$  giờ được cho bởi công thức  $E(v) = cv^3t$ , trong đó  $c$  là hằng số và  $E$  tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên nằm ở khoảng nào thì năng lượng tiêu hao của cá giảm?  
**Đáp số:**

**Lời giải**

Khi bơi ngược dòng vận tốc của cá là:  $v - 6(\text{km/h})$ .

Thời gian để cá vượt khoảng cách  $300 \text{ km}$  là  $t = \frac{300}{v-6}$  ( $v > 6$ ).

Năng lượng tiêu hao của cá khi vượt khoảng cách  $300 \text{ km}$  là  $E(v) = cv^3 \cdot \frac{300}{v-6} = 300c \cdot \frac{v^3}{v-6}$ .

$$E'(v) = 600cv^2 \cdot \frac{v-9}{(v-6)^2}, \quad E'(v) = 0 \Leftrightarrow v = 9 \quad (\text{vì } v > 6).$$

Bảng biến thiên

|         |   |        |           |
|---------|---|--------|-----------|
| $v$     | 6 | 9      | $+\infty$ |
| $E'(v)$ |   | -      | 0         |
| $E(v)$  |   | $E(9)$ |           |

Từ bảng biến thiên ta thấy vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên nằm ở khoảng  $(6; 9)$  thì năng lượng tiêu hao của cá giảm.

**Đáp số:**  $(6; 9)$ .

- Câu 30. (VD)** Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục  $Ox$ . Tọa độ của chất điểm tại thời điểm  $t$  được xác định bởi hàm số  $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$  với  $t \geq 0$ . Khi đó,  $x'(t)$  là vận tốc của chất điểm tại thời điểm  $t$ , kí hiệu  $v(t)$ ,  $v'(t)$  là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm  $t$ , kí hiệu  $a(t)$ .

a) Tìm các hàm  $v(t)$  và  $a(t)$ .

**b)** Trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm tăng, trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm giảm?

**Lời giải**

**(a)** Ta có:  $v(t) = x'(t) = 3t^2 - 12t + 9$ ;  $a(t) = v'(t) = 6t - 12$ .

**(b)** Để tìm khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm tăng, trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm giảm ta đi xét sự biến thiên của hàm  $v(t)$ .

Bảng biến thiên

|      |   |   |           |
|------|---|---|-----------|
| $t$  | 0 | 2 | $+\infty$ |
| $v'$ |   | - | 0         |
| $v$  | 9 |   | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên ta có: Vận tốc của chất điểm tăng khi  $t > 2$  và vận tốc của chất điểm giảm khi  $0 < t < 2$ .

**Câu 31. (VD)** Sự tăng trưởng của một loại virus được xác định bởi hàm số  $p(t) = \frac{800}{1 + 7e^{-0,2t}}$ , trong đó  $t$  là thời gian được tính theo ngày. Ở ngày thứ bao nhiêu thì tốc độ tăng trưởng của loài virus trên là lớn nhất?

**Lời giải**

**Đáp số 10.**

Tốc độ tăng trưởng của virus được tính theo hàm số  $y = p'(t) = \frac{1120 \cdot e^{0,2t}}{(e^{0,2t} + 7)^2}$ ,  $t \geq 0$ .

Xét hàm số  $y = g(t) = \frac{1120 \cdot e^{0,2t}}{(e^{0,2t} + 7)^2}$ , có  $g'(t) = \frac{224 \cdot e^{0,2t} (7 - e^{0,2t})}{(e^{0,2t} + 7)^3}$ .

$g'(t) = 0 \Leftrightarrow 7 - e^{0,2t} = 0 \Leftrightarrow t = 5 \ln 7 \approx 9,7$ .

Ta có bảng dấu của  $g'(t)$  như sau:

|      |   |           |           |
|------|---|-----------|-----------|
| $t$  | 0 | $5 \ln 7$ | $+\infty$ |
| $g'$ |   | +         | -         |

Dựa vào bảng trên ta thấy tốc độ tăng trưởng của virus sẽ đạt lớn nhất ở ngày thứ 10.

**Câu 32. (VD)** Thể tích  $V(\text{cm}^3)$  của 1kg nước tại nhiệt độ  $T(0^\circ\text{C} \leq T \leq 30^\circ\text{C})$  được tính bởi công thức  $V(T) = 999,87 - 0,06426T + 0,0058043T^2 - 0,0000679T^3$ .

Thể tích nước  $V(T)(0^\circ\text{C} \leq T \leq 30^\circ\text{C})$  giảm trong khoảng nhiệt độ  $(a^\circ; b^\circ)$ ;  $b$  làm tròn đến hàng đơn vị. Tổng  $a + b$  bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

Xét hàm số

$V(T) = 999,87 - 0,06426T + 0,0058043T^2 - 0,0000679T^3$  ( $0^\circ\text{C} \leq T \leq 30^\circ\text{C}$ )

$$V'(T) = -0,06426 + 0,0170086T - 0,0002037T^2$$

$$V'(T) = 0 \Leftrightarrow -0,06426 + 0,0170086T - 0,0002037T^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T = 3,966514624 \\ T = 79,53176716(\text{loại}) \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

| T       | 0      | $T_1$    | 30      |
|---------|--------|----------|---------|
| $V'(T)$ | —      | 0        | +       |
| $V(T)$  | $V(0)$ | $V(T_1)$ | $V(30)$ |

Từ bảng biến thiên suy ra thể tích  $V(T)$  ( $0^\circ\text{C} \leq T \leq 30^\circ\text{C}$ ) giảm trong khoảng nhiệt độ từ  $(0^\circ; 4^\circ)$ . Vậy  $a+b=4$

**Câu 33. (VD)** Để thiết kế một chiếc bể cá hình chữ nhật có chiều cao là  $60\text{cm}$ , thể tích là  $96.000\text{cm}^3$ , người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành  $70.000$  đồng/ $\text{m}^2$  và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là  $100.000$  đồng/ $\text{m}^2$ . Tính chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá.

**Lời giải**

$$\text{Diện tích của đáy hộp là: } S = \frac{V}{h} = \frac{96.000}{60} = 1600\text{cm}^2 = 0,16\text{m}^2$$

Gọi chiều dài cạnh đáy của hộp là  $x$ , ( $x > 0, \text{m}$ )

Chiều rộng của hộp là  $\frac{0,16}{x}$

Gọi  $F(x)$  là hàm chi phí để làm bể cá.

Chi phí để hoàn thành bể cá:

$$\begin{aligned} F(x) &= 0,16 \times 100.000 + 2.0,6x.70.000 + 2.0,6 \cdot \frac{0,16}{x}.70.000 \\ &= 16.000 + 48.000x + \frac{13440}{x} \end{aligned}$$

Câu toán trở thành tìm  $x$  để  $F(x)$  đạt GTNN.

$$F'(x) = 84.000 - \frac{13440}{x^2}$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow 84.000 - \frac{13440}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0,4$$

Bảng biến thiên:

| X       | 0 | 0,4        | $+\infty$ |
|---------|---|------------|-----------|
| $F'(x)$ | — | 0          | +         |
| $F(x)$  |   | $F_{\min}$ |           |

Vậy chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là:  $83.200$  đồng.

**Câu 34. (VD)** Một chất điểm chuyển động theo phương trình  $s(t) = -\frac{t^3}{3} + 18t^2 - 35t + 10$ , trong đó  $t$  tính bằng giây và  $s$  tính bằng mét. Trong 40 giây đầu tiên, chất điểm có vận tốc tức thời giảm trong khoảng thời gian  $(a; b)$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = 2b - 3a$ .

**Lời giải**

**Đáp số:** 26.

Vận tốc tức thời của chất điểm là  $v(t) = s'(t) = -t^2 + 36t - 35$ .

Gia tốc tức thời của chất điểm là  $a(t) = v'(t) = -2t + 36$ .

Vì vận tốc tức thời của chất điểm giảm nên  $a(t) < 0 \Leftrightarrow -2t + 36 < 0 \Leftrightarrow t > 18$ .

Do đó, trong 40 giây đầu tiên, chất điểm có vận tốc tức thời giảm trong khoảng thời gian  $(18; 40)$ .

Suy ra  $a = 18$ ,  $b = 40$ .

Vậy  $P = 2b - 3a = 26$ .

**Câu 35. (VD)** Một chất điểm đang đứng yên thì bắt đầu chuyển động theo quy luật  $s(t) = -t^3 + 6t^2 + 9t$ , với  $t$  (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và  $s$  (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi vật tăng tốc trong khoảng thời gian bao lâu tính từ lúc bắt đầu chuyển động?

**Lời giải**

$$+) v(t) = s'(t) = -3t^2 + 12t + 9$$

$$v'(t) = -6t + 12; v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

|         |   |   |           |
|---------|---|---|-----------|
| $t$     | 0 | 2 | $+\infty$ |
| $v'(t)$ |   | 0 | -         |
| $v(t)$  |   |   |           |

+) Do đó vật tăng tốc trong khoảng thời gian 2 (s).

**Câu 36. (VD)** Nhà xe khoán cho hai tài xế An và Bình mỗi người lần lượt nhận 32 lít và 72 lít xăng trong một tháng. Biết rằng, trong một ngày tổng số xăng cả hai người sử dụng là 10 lít. Tính tổng số ngày ít nhất để hai tài xế sử dụng hết số xăng được khoán.

**Lời giải**

**Trả lời:** 20.

Gọi  $x$  (lít) ( $0 < x < 10$ ) là số xăng An sử dụng trong 1 ngày.

Khi đó:  $10 - x$  (lít) là số xăng Bình sử dụng trong 1 ngày.

Suy ra  $f(x) = \frac{32}{x} + \frac{72}{10-x}$ ,  $x \in (0; 10)$  là tổng số ngày An và Bình sử dụng hết số xăng được khoán.

$$\text{Ta có: } f(x) = \frac{32}{x} + \frac{72}{10-x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{32}{x^2} + \frac{72}{(10-x)^2}.$$

$$\text{Cho } f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{32}{x^2} + \frac{72}{(10-x)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -20 \notin (0; 10) \end{cases}$$

$$\text{Bảng biến thiên của hàm số } f(x) = \frac{32}{x} + \frac{72}{10-x}, x \in (0; 10)$$

|         |           |   |    |   |           |
|---------|-----------|---|----|---|-----------|
| $x$     | 0         | 4 | 10 |   |           |
| $f'(x)$ |           | - | 0  | + |           |
| $f(x)$  | $+\infty$ |   | 20 |   | $+\infty$ |

Theo BBT: ít nhất 20 ngày thì An và Bình sử dụng hết lượng xăng được khoán.

- Câu 37. (VD)** Hằng ngày mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu  $h$  (m) của mực nước trong kênh tại thời điểm  $t$  (h) ( $0 \leq t \leq 24$ ) trong ngày được xác định bởi công thức  $h = 2 \cos\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3}\right) + 5$ . Gọi  $(a; b)$  là khoảng thời gian trong ngày mà độ sâu của mực nước trong kênh tăng dần. Tính giá trị của  $a + b$ .

**Lời giải**

Ta có  $h(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3}\right) + 5 \Rightarrow h'(t) = -\frac{\pi}{6} \sin\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3}\right)$ .

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow t = -4 + 12k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Mà  $0 \leq t \leq 24$  nên  $0 \leq -4 + 12k \leq 24 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq k \leq \frac{7}{3} \Rightarrow k \in \{1; 2\}$ .

Do đó  $h'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 8 \\ t = 20 \end{cases}$

|         |   |   |    |    |   |   |   |
|---------|---|---|----|----|---|---|---|
| $t$     | 0 | 8 | 20 | 24 |   |   |   |
| $h'(t)$ |   | - | 0  | +  | 0 | - |   |
| $h(t)$  | 6 |   | 3  |    | 7 |   | 6 |

$\Rightarrow h(t)$  đồng biến trên khoảng  $(8; 20)$  hay trong khoảng từ 8 h đến 20 h độ sâu của mực nước trong kênh tăng dần.

Vậy  $a = 8; b = 20$  và  $a + b = 28$ .

- Câu 38. (VD)** Xí nghiệp  $A$  sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết rằng hàm tổng chi phí sản xuất là  $TC = x^3 - 77x^2 + 1000x + 40000$  và hàm doanh thu là  $TR = -2x^2 + 1312x$ , với  $x$  là số sản phẩm. Lợi nhuận của xí nghiệp  $A$  được xác định bằng hàm số  $f(x) = TR - TC$ , cực đại lợi nhuận của xí nghiệp  $A$  khi đó đạt bao nhiêu sản phẩm?

**Lời giải**

Trả lời:  $x = 52$ .

Xét hàm số:

$$f(x) = TR - TC = -2x^2 + 1312x - (x^3 - 77x^2 + 1000x + 40000).$$

$$f(x) = -x^3 + 75x^2 + 312x - 40000.$$

TXĐ:  $D = (0; +\infty)$ .

Ta có  $f'(x) = -3x^2 + 150x + 312 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 52(N) \\ x = -2(L) \end{cases}$

Bảng biến thiên:

|         |         |         |           |   |
|---------|---------|---------|-----------|---|
| $x$     | 0       | 52      | $+\infty$ |   |
| $f'(x)$ |         | +       | 0         | - |
| $f(x)$  | $-4000$ | $74416$ | $-\infty$ |   |

Hàm số đạt giá trị cực đại  $y_{CD} = 74416$  tại  $x = 52$ .

Vậy lợi nhuận của công ty đạt cực đại khi số sản phẩm  $x = 52$ .

- Câu 39. (VD)** Thể tích  $V$  của 1kg nước ở nhiệt độ  $T$  ( $0^\circ \leq T \leq 30^\circ$ ) được cho bởi công thức  $V = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3$ . (Theo: J. Stewart, Calculus, Seventh Edition, Brooks/Cole, CENGAGE Learning 2012). Gọi  $(a^\circ; b^\circ)$  là khoảng nhiệt độ mà trong khoảng đó khi nhiệt độ tăng thì thể tích  $V$  của 1kg nước cũng tăng. Tính giá trị biểu thức  $P = b - a$  ( $a, b$  làm tròn đến hàng đơn vị).

#### Lời giải

Xét hàm số  $f(T) = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3$  với  $0^\circ \leq T \leq 30^\circ$ .

Nhiệt độ tăng thì thể tích của 1kg nước tăng tức hàm số  $f(T)$  đồng biến.

$$f'(T) = -0,06426 + 0,0170086T - 2,037 \cdot 10^{-4}T^2.$$

$$f'(T) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} T_1 \approx 3,966 \in [0; 30] \\ T_2 \approx 79,532 > 30 \end{cases}.$$

$f'(T) > 0, \forall T \in (T_1; T_2) \Rightarrow$  hàm số  $f(T)$  đồng biến trên khoảng  $(T_1; T_2)$ .

Suy ra khi  $T \in (T_1^\circ; 30^\circ)$  thì khi nhiệt độ nước tăng thể tích của 1kg nước cũng tăng hay  $a = 4; b = 30$ .

Vậy  $b - a = 26$ .

- Câu 40. (VD)** Máng trượt của một cầu trượt cho trẻ em được uốn từ một tấm kim loại có bề rộng 80 cm, mặt cắt được mô tả ở Hình 2. Nhà thiết kế khuyến cáo, diện tích của mặt cắt càng lớn thì càng đảm bảo an toàn cho trẻ em.



**Hình 2**

Gọi  $S$  là diện tích mặt cắt. Với  $x$  đạt giá trị bằng bao nhiêu thì cầu trượt đảm bảo an toàn nhất cho trẻ em?

#### Lời giải

**Trả lời:** 20

Do tấm kim loại có bề rộng 80 cm nên ta có:  $2x + y = 80 \Leftrightarrow y = 80 - 2x$ .

Để có thể thiết kế được máng trượt thì  $y > 0 \Leftrightarrow 80 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 40$ . Suy ra  $0 < x < 40$ .

Diện tích của mặt cắt máng trượt là:  $S = xy = x(80 - 2x) = -2x^2 + 80x$ .

Ta có:  $S(x) = -2x^2 + 80x$  với  $x \in (0; 40)$ ;

$$S'(x) = -4x + 80;$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 80 = 0 \Leftrightarrow x = 20.$$

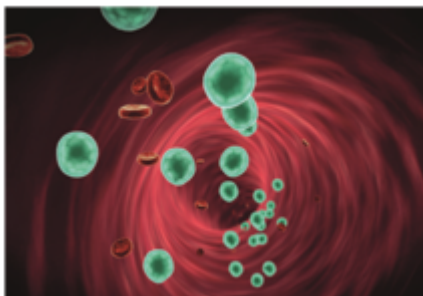
Bảng biến thiên của hàm số  $S(x)$  như sau:

|         |   |     |    |
|---------|---|-----|----|
| $x$     | 0 | 20  | 40 |
| $S'(x)$ | + | 0   | -  |
| $S(x)$  | 0 | 800 | 0  |

Do đó, hàm số  $S(x)$  đạt cực đại tại  $x = 20$  và  $S_{CD} = 800$ .

Vậy để cầu trượt đảm bảo an toàn nhất cho trẻ em thì  $x = 20$  (cm).

**Câu 41. (VD)** Khi loại thuốc A được tiêm vào bệnh nhân, nồng độ  $mg/l$  của thuốc trong máu sau  $x$  phút (kể từ khi bắt đầu tiêm) được xác định bởi công thức:  $C(x) = \frac{30x}{x^2 + 2}$ .



(Nguồn: James Stewart, J. (2015). *Calculus*. Cengage Learning)

Để đưa ra những lời khuyên và cách xử lý phù hợp cho bệnh nhân, ta cần tìm khoảng thời gian mà nồng độ của thuốc trong máu đang tăng. Em hãy cho biết hàm nồng độ thuốc trong máu  $C(x)$  đạt giá trị cực đại là bao nhiêu trong khoảng thời gian 6 phút sau khi tiêm (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?

**Lời giải**

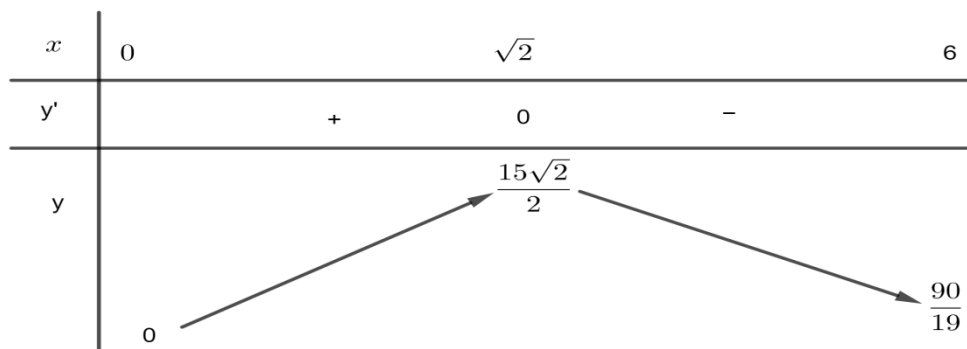
**Trả lời:** 10,6 ( $mg/l$ ).

Xét hàm số  $y = C(x) = \frac{30x}{x^2 + 2}$  trên khoảng  $x \in (0; 6)$ .

Ta có:  $y' = \frac{-30x^2 + 60}{(x^2 + 2)^2}$ .

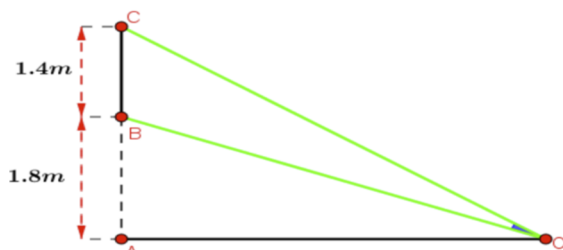
$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{-30x^2 + 60}{(x^2 + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases} \text{ do } x \in (0; 6) \Rightarrow x = \sqrt{2}.$$

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên suy ra: nồng độ thuốc trong máu  $C(x)$  đạt giá trị cực đại là  $\frac{15\sqrt{2}}{2} (mg/l) \approx 10,6 (mg/l)$  trong khoảng thời gian 6 phút sau khi tiêm.

**Câu 42. (VD)** Một màn hình chữ nhật cao 1,4m và đặt ở độ cao 1,8m so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình như hình vẽ bên dưới).



Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đứng sao cho góc nhìn lớn nhất. Tính khoảng cách từ vị trí đó đến màn hình? Biết rằng góc  $\widehat{BOC}$  nhọn.

**Lời giải**

Đặt độ dài  $OA = x (m)$  với  $x > 0$ . Ta có:  $OB = \sqrt{x^2 + 3,24}$ ;  $OC = \sqrt{x^2 + 10,24}$

Sử dụng định lý cosin trong tam giác  $OBC$ :

$$\begin{aligned} \cos \widehat{BOC} &= \frac{OB^2 + OC^2 - BC^2}{2 \cdot OB \cdot OC} = \frac{x^2 + 3,24 + x^2 + 10,24 - 1,96}{2\sqrt{x^2 + 3,24} \cdot \sqrt{x^2 + 10,24}} \\ &= \frac{x^2 + 5,76}{\sqrt{(x^2 + 3,24)(x^2 + 10,24)}}. \end{aligned}$$

Vì góc  $\widehat{BOC}$  nhọn nên  $\widehat{BOC}$  lớn nhất khi và chỉ khi  $\cos \widehat{BOC}$  nhỏ nhất. Khi đó bài toán trở

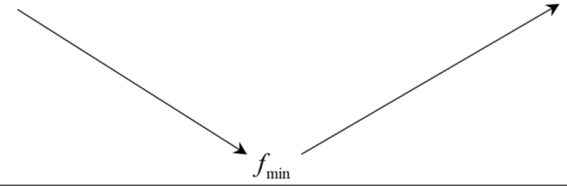
thành tìm  $x$  để  $f(x) = \frac{x^2 + 5,76}{\sqrt{(x^2 + 3,24)(x^2 + 10,24)}}$  đạt giá trị nhỏ nhất.

Đặt  $t = x^2 + 3,24$  với  $t > 3,24$ . Suy ra  $f(t) = \frac{t + \frac{63}{25}}{\sqrt{t(t+7)}}$  với  $t \in (3,24; +\infty)$ .

$$\text{Ta có: } f'(t) = \frac{1}{25} \left( \frac{49t - 441}{2t(t+7)\sqrt{t(t+7)}} \right).$$

$$\text{Cho } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 49t - 441 = 0 \Leftrightarrow t = 9.$$

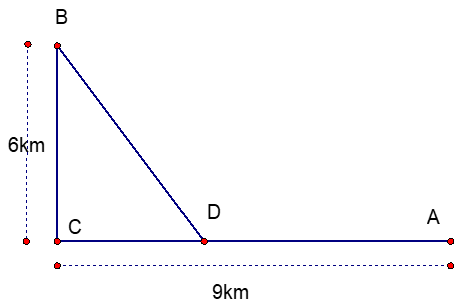
Bảng biến thiên:

|         |                                                                                   |   |           |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------|---|-----------|
| $t$     | 0                                                                                 | 9 | $+\infty$ |
| $f'(t)$ | -                                                                                 | 0 | +         |
| $f(t)$  |  |   |           |

Thế vào biểu thức của phép đặt ta có:  $x^2 + 3,24 = 9 \Leftrightarrow x^2 = \frac{144}{25} \Rightarrow x = 2,4\text{m}$ .

Vậy để nhìn rõ nhất thì khoảng cách từ vị trí đó đến màn hình là  $OA = 2,4\text{m}$ .

- Câu 43. (VD)** Một công ty muốn xây dựng hệ thống dây cáp từ trạm A ở trên bờ biển đến một vị trí B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6 km. Gọi C là điểm trên bờ sao cho BC vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến C là 9 km. Giá để lắp đặt mỗi km hệ thống dây trên bờ là 50 triệu đồng và dưới nước là 130 triệu đồng. Người ta cần xác định một vị trí D trên AC để lắp đặt hệ thống dây theo đường gấp khúc ADB mà số tiền chi phí thấp nhất. Khi đó chi phí lắp đặt thấp nhất là bao nhiêu triệu đồng?



### Lời giải

Đặt  $CD = x$  (km) ( $x \in [0; 9]$ )

Ta có  $AD = 9 - x$  (km) và  $BD = \sqrt{CD^2 + BC^2} = \sqrt{x^2 + 36}$  (km).

Chi phí lắp đặt là:  $F(x) = 50(9 - x) + 130\sqrt{x^2 + 36}$  (triệu đồng).

Xét hàm số  $F(x) = 50(9 - x) + 130\sqrt{x^2 + 36}$  trên  $[0; 9]$

$$F'(x) = -50 + \frac{130x}{\sqrt{x^2 + 36}}.$$

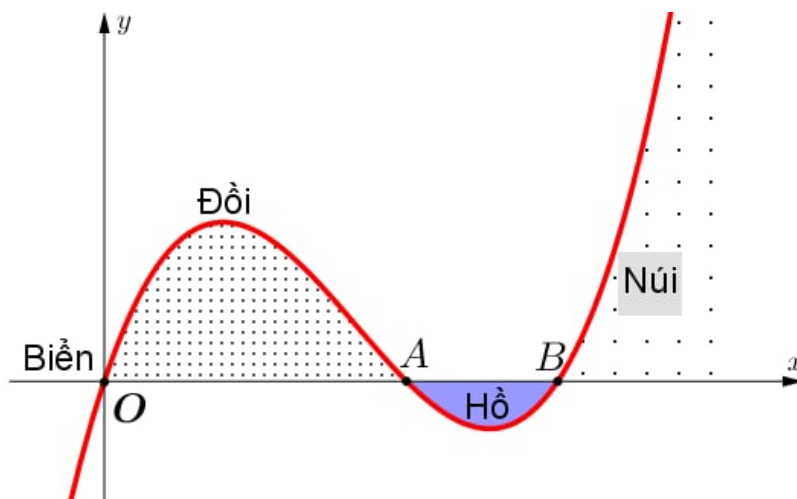
$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{130x}{\sqrt{x^2 + 36}} - 50 = 0 \Leftrightarrow 13x = 5\sqrt{x^2 + 36} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 169x^2 = 25(x^2 + 36) \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \text{ (tm)}$$

BBT:

|         |      |                |      |
|---------|------|----------------|------|
| $x$     | 0    | $\frac{5}{2}$  | 9    |
| $F'(x)$ | -    | 0              | +    |
| $F(x)$  | 1230 | $390\sqrt{13}$ | 1170 |

Vậy chi phí thấp nhất để lắp đặt hệ thống dây cáp là 1170 triệu đồng.

- Câu 44. (VD)** Lát cắt ngang của một vùng đất ven biển được mô hình hoá thành một hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ (đơn vị độ dài trên các trục là km).



Biết khoảng cách hai bên chân đồi  $OA = 2$  km, độ rộng của hồ  $AB = 1$  km và ngọn đồi cao 528 m. Tìm độ sâu của hồ (tính bằng mét) tại điểm sâu nhất? (làm tròn đến hàng đơn vị).

#### Lời giải

Theo đề bài ta có :  $OA = 2$  km,  $OB = 3$  km và  $528 \text{ m} = 0,528 \text{ km}$ .

Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  đi qua các điểm  $O(0; 0)$ ,  $A(2; 0)$ ,  $C(3; 0)$  suy ra  $y = f(x) = ax(x-2)(x-3) = a(x^3 - 5x^2 + 6x)$  với  $a > 0$ .

$$\text{Ta có : } y' = a(3x^2 - 10x + 6), y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 + \sqrt{7}}{3} \\ x = \frac{5 - \sqrt{7}}{3} \end{cases}$$

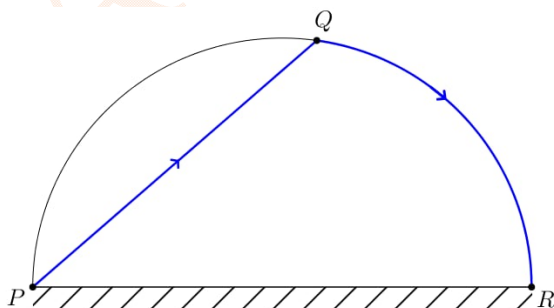
Từ độ cao của đồi ta có tại vị trí điểm cực đại  $x_{CD} = \frac{5 - \sqrt{7}}{3}$ ;  $y_{CD} = 0,528$  suy ra

$$a = \frac{0,528}{\left(\frac{5 - \sqrt{7}}{3}\right)^3 - 5 \cdot \left(\frac{5 - \sqrt{7}}{3}\right)^2 + 6 \cdot \left(\frac{5 - \sqrt{7}}{3}\right)} \approx 0,25.$$

Điểm sâu nhất của hồ ứng với vị trí của điểm cực tiểu  $x_{CT} = \frac{5 + \sqrt{7}}{3}$ ,  $y_{CT} \approx 0,1578$ .

Vậy độ sâu của hồ tại điểm sâu nhất xấp xỉ 0,1578 km hay xấp xỉ 158 m.

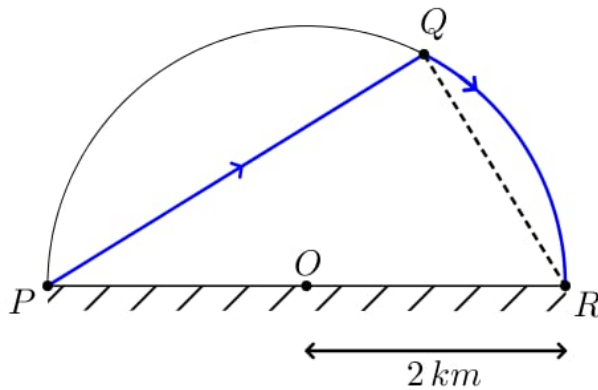
**Câu 45. (VD)** Cho một bờ hồ hình bán nguyệt có bán kính bằng 2 km, đường kính  $PR$  như hình vẽ sau :



Từ điểm  $P$  anh Tài chèo một chiếc thuyền với vận tốc 3 km/h đến điểm  $Q$  trên bờ hồ, rồi chạy bộ dọc theo thành hồ đến vị trí  $R$  với vận tốc 6 km/h. Thời gian chậm nhất mà anh Tài di chuyển từ  $P$  đến  $R$  là bao nhiêu? (thời gian tính bằng phút).

#### Lời giải

Đặt  $\widehat{QPR} = \varphi (\text{rad})$ ,  $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .



Ta có  $\Delta PQR$  vuông tại  $Q \Rightarrow PQ = PR \cdot \cos \varphi = 4 \cos \varphi$ .

Mà  $\widehat{QOR} = 2\widehat{QPR} = 2\varphi$ .

Độ dài cung tròn  $QR = 2.2\varphi = 4\varphi$ .

Thời gian anh Tài chèo từ  $P$  đến  $Q$  là:  $\frac{4 \cos \varphi}{3}$  (giờ).

Thời gian anh Tài chèo từ  $Q$  đến  $R$  là:  $\frac{4\varphi}{6} = \frac{2\varphi}{3}$  (giờ).

Tổng thời gian anh Tài di chuyển từ  $P$  đến  $R$  là:  $t = \frac{4 \cos \varphi}{3} + \frac{2\varphi}{3} \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ .

Xét hàm số  $t(\varphi) = \frac{4 \cos \varphi}{3} + \frac{2\varphi}{3}$  với  $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

$$t'(\varphi) = \frac{1}{3}(-4 \sin \varphi + 2), \quad \varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$t'(\varphi) = 0, \quad \varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin \varphi = \frac{1}{2}, \quad \varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

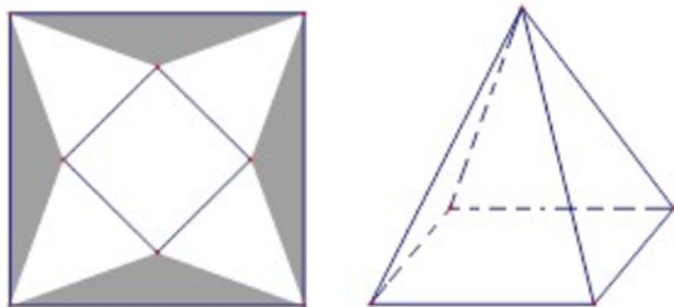
$$\Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Bảng biến thiên

| $\varphi$     | 0             | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{2}$               |                 |
|---------------|---------------|-----------------|-------------------------------|-----------------|
| $t'(\varphi)$ |               | +               | 0                             | -               |
| $t(\varphi)$  |               |                 | $t\left(\frac{\pi}{6}\right)$ |                 |
|               | $\frac{4}{3}$ |                 |                               | $\frac{\pi}{3}$ |

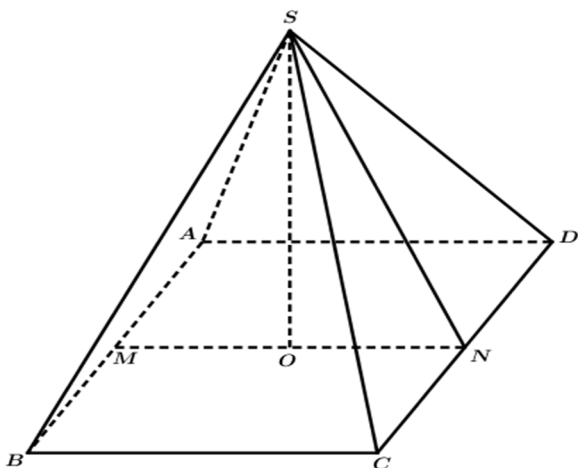
Vậy thời gian chậm nhất mà anh Tài di chuyển từ  $P$  đến  $R$  là  $t\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{9} \approx 1,5$  (giờ) hay 90 phút.

**Câu 46. (VD)** Một tấm bạt hình vuông cạnh  $20m$  như hình vẽ dưới đây. Người ta dự tính cắt phần tô đậm của tấm bạt rồi gập và may lại (các đường may không đáng kể), nhằm mục đích phủ lên tháp đèn trang trí (tháp dạng hình chóp tứ giác đều) để tránh hư hại tháp khi trời mưa.



Biết khối chóp hình thành sau khi gập và may lại cần thể tích lớn nhất thì mới phủ kín tháp đèn. Hỏi phần diện tích tấm bạt bị cắt là bao nhiêu để đảm bảo yêu cầu trên.

**Lời giải**



Gọi cạnh đáy hình vuông của tháp là  $x(m)$ .

Độ dài đường chéo tấm bạt bằng  $20\sqrt{2}(m)$ .

Gọi hình chóp tứ giác đều là  $S.ABCD$ , Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $AB, CD$ .

Khi đó  $MN = x(m)$ ,  $SN = \frac{20\sqrt{2} - x}{2}(m)$  với  $0 < x < 10\sqrt{2}$ .

Gọi  $O$  là tâm của hình vuông, ta có

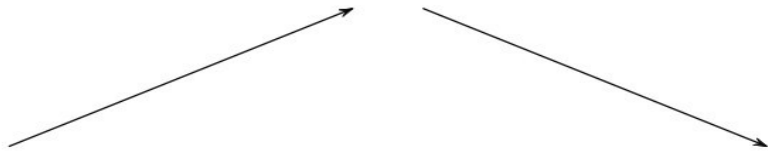
$$SO = \sqrt{SN^2 - ON^2} = \sqrt{\left(\frac{20\sqrt{2} - x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{800 - 40\sqrt{2}x}.$$

$$\text{Thể tích khối chóp } V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{6}x^2\sqrt{800 - 40\sqrt{2}x}.$$

$$\text{Ta có } V' = \frac{20x(80 - 5\sqrt{2}x)}{6\sqrt{800 - 40\sqrt{2}x}}$$

$$\Rightarrow V' = 0 \Leftrightarrow x = 8\sqrt{2} \text{ với } 0 < x < 10\sqrt{2}.$$

Xét bảng biến thiên:

|         |                                                                                    |             |              |   |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------|--------------|---|
| $x$     | 0                                                                                  | $8\sqrt{2}$ | $10\sqrt{2}$ |   |
| $V'(x)$ |                                                                                    | +           | 0            | - |
| $V(x)$  |  |             |              |   |

Vậy khi  $x = 8\sqrt{2}$  thì thể tích khối chóp lớn nhất  $V = \frac{256\sqrt{10}}{3} (m^3)$ .

Diện tích phần bị cắt của tấm bạt:

$$S = S_{hv} - S_{ABCD} - 4.S_{\Delta SAB} = 20^2 - (8\sqrt{2})^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{20\sqrt{2} - 8\sqrt{2}}{2} \cdot 8\sqrt{2} = 80 (m^2).$$

## ỨNG DỤNG THỰC TẾ ĐẠO HÀM VÀ KHẢO SÁT HÀM SỐ

### DẠNG 3: ỨNG DỤNG THỰC TẾ GTLN, GTNN

#### I - TÓM TẮT LÝ THUYẾT

##### 1. Định nghĩa:

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên tập hợp  $D$ .

- Số  $M$  được gọi là **giá trị lớn nhất của hàm số**  $y = f(x)$  trên  $D$  nếu  $f(x) \leq M$  với mọi  $x$  thuộc  $D$  và tồn tại  $x_0$  thuộc  $D$  sao cho  $f(x_0) = M$ . Kí hiệu  $M = \max_D f(x)$ .
- Số  $m$  được gọi là **giá trị nhỏ nhất của hàm số**  $y = f(x)$  trên  $D$  nếu  $f(x) \geq m$  với mọi  $x$  thuộc  $D$  và tồn tại  $x_0$  thuộc  $D$  sao cho  $f(x_0) = m$ . Kí hiệu  $m = \min_D f(x)$ .

**Chú ý:** Ta quy ước khi chỉ nói GTLN hay GTNN của hàm số  $y = f(x)$  (mà không cho rõ tập hợp  $D$ ) thì ta hiểu đó là GTLN hay GTNN của hàm số  $y = f(x)$  trên tập xác định của nó.

**Nhận xét:** Nếu biết đồ thị của hàm số trên tập hợp  $D$ , ta có thể xác định được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên  $D$ .

**Chú ý:** GTLN và GTNN của hàm số thường được tìm bằng cách sử dụng đạo hàm và bảng biến thiên.

##### 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn:

**Định lý:** Hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$  thì luôn có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn  $[a; b]$ .

**Phương pháp tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn  $[a; b]$**

**Bước 1:** Tìm các điểm  $x_1; x_2; \dots; x_n$  thuộc khoảng  $(a; b)$  mà tại đó  $f'(x)$  bằng 0 hoặc không tồn tại.

**Bước 2:** Tính  $f(a); f(x_1); f(x_2); \dots; f(x_n); f(b)$ .

**Bước 3:** Gọi  $M$  là số lớn nhất và  $m$  là số nhỏ nhất trong các giá trị tìm được ở **Bước 2**.

Khi đó:  $M = \max_{[a; b]} f(x)$ ,  $m = \min_{[a; b]} f(x)$

#### II - CÁC DẠNG TOÁN

**Dạng 1: Toán thực tế cho sẵn hàm**

**Phương pháp:**

+ **Tự luận:** đi tìm min, max trên đoạn, khoảng, nửa khoảng.

+ **MTCT:** Mode 7.

**Câu 1.** (TH) Một bài báo trong tạp chí xã hội học phát biểu rằng nếu một chương trình chăm sóc sức khỏe đặc biệt cho người già được khởi xướng, thì  $t$  năm sau khi nó được khởi động,  $n$  ngàn người già có thể trực tiếp nhận được các phúc lợi, trong đó

$$n = \frac{t^3}{3} - 6t^2 + 32t \quad (0 \leq t \leq 12).$$

Với giá trị nào của  $t$  thì số người nhận phúc lợi tối đa là bao nhiêu?

**Câu 2.** (TH) Một xe khách đi từ Việt Trì về Hà Nội chở tối đa được là 60 hành khách một chuyến. Nếu một chuyến chở được  $m$  hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách được tính là  $\left(30 - \frac{5m}{2}\right)^2$  đồng. Tính số hành khách trên mỗi chuyến xe để nhà xe thu được lợi nhuận mỗi chuyến xe là lớn nhất.?

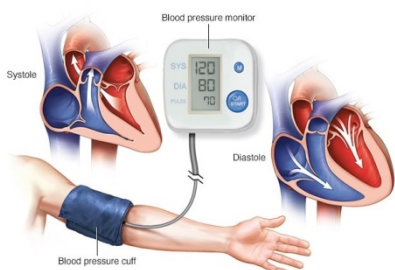
A. 30

B. 40

C. 50

D. 60

**Câu 3.** (TH) Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức  $G(x) = 0,035x^2(15 - x)$ , trong đó  $x$  là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân ( $x$  được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.



Lời giải

**Đáp số: 10**Điều kiện:  $x \in [1; 15]$  (vì độ giảm huyết áp không thể là số âm)

$$G'(x) = 0,035[2x(15 - x) - x^2] = 0,105x(10 - x)$$

$$\Rightarrow G'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [1; 15] \\ x = 10 \in [1; 15] \end{cases}$$

Ta có:

$$G(1) = \frac{49}{100} = 0,49.$$

$$G(10) = \frac{35}{2} = 17,5.$$

$$G(15) = 0.$$

Vậy huyết áp bệnh nhân giảm nhiều nhất khi tiêm cho bệnh nhân liều  $x = 10$  miligam.

**Câu 4.** (TH) Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức  $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$ , trong đó  $x$  là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân ( $x$  được tính bằng miligam). Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất bằng

A. 100 mg.

B. 20 mg.

C. 30 mg.

D. 0 mg.

Lời giải

**Chọn B**Ta có:  $G(x) = 0,75x^2 - 0,025x^3$ ,  $x > 0$ ;  $G'(x) = 1,5x - 0,075x^2$ ;  $G'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 20$ 

Bảng biến thiên:

| $x$     | 0 | 20  | $+\infty$ |
|---------|---|-----|-----------|
| $G'(x)$ |   | +   | 0         |
| $G(x)$  |   | 100 |           |

Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất là 20 mg, độ giảm là 100.

**Câu 5.** (TH) Để giảm nhiệt độ trong phòng từ  $28^{\circ}\text{C}$ , một hệ thống làm mát được phép hoạt động trong 10 phút. Gọi  $T$  (đơn vị  $^{\circ}\text{C}$ ) là nhiệt độ phòng ở phút thứ  $t$  được cho bởi công thức  $T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$  với  $t \in [1; 10]$ . Tìm nhiệt độ thấp nhất trong phòng đạt được trong thời gian 10 phút kể từ khi hệ thống làm mát bắt đầu hoạt động.

- A.  $27,832^{\circ}\text{C}$ .      B.  $18,4^{\circ}\text{C}$ .      C.  $26,2^{\circ}\text{C}$ .      D.  $25,312^{\circ}\text{C}$ .

**Lời giải:**

Xét hàm số  $T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$  với  $t \in [1; 10]$ .

$$T' = -0,024t^2 - 0,16 < 0, \forall t \in [1; 10].$$

Suy ra hàm số  $T$  nghịch biến trên đoạn  $[1; 10]$ .

Nhiệt độ thấp nhất trong phòng đạt được là  $T_{\min} = T(10) = 18,4^{\circ}\text{C}$ .

**Câu 6.** (TH) Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong  $t$  giờ được cho bởi công thức  $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$  (mg / L). Hỏi sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

**Lời giải**

$$\text{Xét hàm số } c(t) = \frac{t}{t^2 + 1} \quad (t > 0)$$

$$\text{Ta có } c'(t) = \frac{1 - t^2}{(t^2 + 1)^2}$$

$$c'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases} (L)$$

Ta có bảng biến thiên

|         |   |               |           |
|---------|---|---------------|-----------|
| $t$     | 0 | 1             | $+\infty$ |
| $c'(t)$ | + | 0             | -         |
| $c(t)$  | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0         |

Vậy khi  $t = 1$  thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân là cao nhất.

**Câu 7.** (TH) Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ  $t$  là  $f(t) = 45t^2 - t^3$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots, 25$ . Nếu coi  $f(t)$  là hàm số xác định trên đoạn  $[0; 25]$  thì đạo hàm  $f'(t)$  được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm  $t$ . Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất?

- A. Ngày thứ 19.      B. Ngày thứ 5.      C. Ngày thứ 16.      D. Ngày thứ 15.

**Lời giải**

**Chọn D**

$$f'(t) = 90t - 3t^2; \quad f''(t) = 90 - 6t, \quad f''(t) = 0 \Leftrightarrow t = 15$$

Bảng biến thiên

|          |   |    |     |   |
|----------|---|----|-----|---|
| $t$      | 0 | 15 | 25  |   |
| $f''(t)$ |   | +  | 0   | - |
| $f'(t)$  |   |    | 675 |   |

Tốc độ truyền bệnh lớn nhất là vào ngày thứ 15.

- Câu 8. (TH)** Để tăng nhiệt độ trong phòng từ  $18^{\circ}\text{C}$  người ta sử dụng một cái máy sưởi (máy được phép hoạt động trong 9 phút). Gọi  $T$  (đơn vị  $^{\circ}\text{C}$ ) là nhiệt độ phòng ở phút thứ  $t$  (m/s). được cho bởi công thức  $T = -0,003t^3 + 0,9t^2 + 18$  với  $t \in [1;12]$ . Tìm nhiệt độ cao nhất trong phòng đạt được trong thời gian 9 phút kể từ khi máy sưởi bắt đầu hoạt động.

A. 24

B. 28

C. 22

D. 23

**Lời giải**

Bài toán quy về tìm GTLN của hàm số  $T = -0,003t^3 + 0,9t^2 + 18$ ,  $t \in [1;12]$

- Câu 9. (TH)** Thể tích nước của một bể bơi sau  $t$  phút bơm tính theo công thức  $V(t) = \frac{1}{100} \left( 30t^3 - \frac{t^4}{4} \right)$

(lít) với  $(0 \leq t \leq 90)$ . Tốc độ bơm nước tại thời điểm  $t$  được tính bởi công thức  $f(t) = V'(t)$ .

Xác định tính **đúng/sai** của các khẳng định sau:

- a) Thể tích nước của bể bơi sau 20 phút bơm là 2000 (lít).
- b) Tốc độ bơm nước tại thời điểm  $t$  là  $f(t) = 90t^2 - t^3$ .
- c) Tốc độ bơm giảm từ phút thứ 70 đến phút thứ 90.
- d) Tốc độ bơm lớn nhất tại thời điểm  $t = 60$  (phút).

**Lời giải**

(a)  $V(20) = \frac{1}{100} \left( 30 \cdot 20^3 - \frac{20^4}{4} \right) = 2000$ . Vậy (a) Đúng

(b) Ta có  $V'(t) = \frac{1}{100} (90t^2 - t^3) \Rightarrow f(t) = \frac{1}{100} (90t^2 - t^3)$ . Vậy (b) Sai

(c) Ta có  $V''(t) = \frac{1}{100} (180t - 3t^2) \Leftrightarrow V''(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 60 \\ t = 0 \end{cases}$

+) Ta có bảng biến thiên của hàm số

|          |   |    |      |   |   |
|----------|---|----|------|---|---|
| $t$      | 0 | 60 | 90   |   |   |
| $V''(t)$ | + | 0  | -    | 0 |   |
| $V'(t)$  |   |    | 1080 |   | 0 |

Suy ra tốc độ bơm giảm từ phút thứ 60 đến phút thứ 90. Vậy (c) Đúng

(d) Từ bảng biến thiên ta có tốc độ lớn nhất khi  $t = 60$  (phút). Vậy (d) Đúng.

- Câu 10. (VD)** Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể sau  $t$  giờ được cho bởi công thức  $c(t) = \frac{2t}{t^2 + 1}$  ( $\text{mg/L}$ ). Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

**Lời giải**

Xét hàm số  $c(t) = \frac{2t}{t^2 + 1}$ , ( $t > 0$ ).

$$c'(t) = \frac{2 - 2t^2}{(t^2 + 1)^2}.$$

$$c'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}.$$

|         |   |   |           |
|---------|---|---|-----------|
| $t$     | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $c(t)$  | + | 0 | -         |
| $c'(t)$ | 0 | 1 | 0         |

Sau 1 giờ thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất.

**Câu 11.** (TH) Công suất  $P$  (đơn vị  $W$ ) của một mạch điện được cung cấp bởi một nguồn pin  $12V$  được cho bởi công thức  $P = 12I - 0,5I^2$  với  $I$  (đơn vị  $A$ ) là cường độ dòng điện. Tìm công suất tối đa của mạch điện.

**A.** 72.

**B.** 12.

**C.**  $-\frac{1}{192}$ .

**D.**  $\frac{23}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Xét hàm số  $P = 12I - 0,5I^2$  với  $I \geq 0$ .

$$P' = 12 - I. \quad P' = 0 \Leftrightarrow I = 12.$$

Bảng biến thiên:

|     |   |    |           |
|-----|---|----|-----------|
| $I$ | 0 | 12 | $+\infty$ |
| $P$ |   | 72 |           |

Công suất tối đa của mạch điện là  $72(W)$  đạt được khi cường độ dòng điện là  $12(A)$ .

**Câu 12.** (TH) Một hợp tác xã nuôi cá thí nghiệm trong hồ. Người ta thấy rằng nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có  $n$  con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng  $P(n) = 480 - 20n$  (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều gam cá nhất?

**A.** 12.

**B.** 24.

**C.** 6.

**D.** 32.

**Lời giải**

**Chọn A**

Sau một vụ, trung bình số cá trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ cân nặng:

$$f(n) = nP(n) = 480n - 20n^2 \text{ (gam)}. \quad f'(n) = 480 - 40n = 0 \Leftrightarrow n = 12$$

Bảng biến thiên:

|         |   |    |           |   |
|---------|---|----|-----------|---|
| $n$     | 0 | 12 | $+\infty$ |   |
| $f'(n)$ |   | +  | 0         | - |
| $f(n)$  |   |    | $f(12)$   |   |

Trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ, cần thả 12 con cá thì sau một vụ thu hoạch được nhiều gam cá nhất.

**Câu 13. (TH)** Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà khoa học đã nhận thấy rằng: nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có  $n$  con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng là  $P(n) = 800 - 20n$  (g). Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

A. 19.

B. 20.

C. 21.

D. 22.

**Lời giải**

Gọi  $F(n)$  là hàm cân nặng của  $n$  con cá sau vụ thu hoạch trên một đơn vị diện tích.

Ta có:  $F(n) = (800 - 20n).n = 800n - 20n^2$ .

Để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất thì cân nặng của  $n$  con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ là lớn nhất.

Bài toán trở thành tìm  $n \in \mathbb{N}^*$  sao cho  $F(n)$  đạt GTLN.

$$F'(n) = 800 - 40n$$

$$F'(n) = 0 \Leftrightarrow 800 - 40n = 0 \Leftrightarrow n = 20$$

Ta có bảng biến thiên:

|         |           |      |           |
|---------|-----------|------|-----------|
| $n$     | $-\infty$ | 20   | $+\infty$ |
| $F'(n)$ | +         | 0    | -         |
| $F(n)$  | $-\infty$ | 8000 | $-\infty$ |

Vậy phải thả 20 con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất.

**Câu 14. (VD)** Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hóa bằng hàm số  $N(t) = -t^3 + 12t^2$ ,  $0 \leq t \leq 12$ , trong đó  $N$  là số người bị nhiễm bệnh (tính bằng trăm người) và  $t$  là thời gian (tuần). Đạo hàm  $N'(t)$  biểu thị tốc độ lây lan của virus (còn gọi là tốc độ truyền bệnh). Vi rút lây lan nhanh nhất vào thời gian nào?

A. Tuần 4.

B. Tuần 8.

C. Tuần 12.

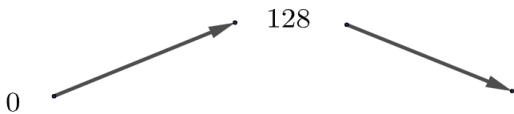
D. Tuần 6.

**Lời giải**

Tốc độ lây lan của virus là  $N'(t) = -3t^2 + 24t$ . Tốc độ lây lan nhanh nhất khi  $N'(t)$  đạt GTLN

$$\text{Ta có } N''(t) = -6t + 24 = 0 \Leftrightarrow t = 4$$

Bảng biến thiên

|          |                                                                                    |   |    |   |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------|---|----|---|
| $t$      | 0                                                                                  | 4 | 12 |   |
| $N''(t)$ | 0                                                                                  | + | 0  | − |
| $N'(t)$  |  |   |    |   |

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy vi rút lây lan nhanh nhất vào thời điểm tuần thứ 4.

**Câu 15. (VD)** Ho ép khí quản co lại, ảnh hưởng đến tốc độ không khí đi vào khí quản. Tốc độ của không khí đi vào khí quản khi ho đo được bởi công thức

$$V = k(R-r)r^2 \text{ với } 0 \leq r < R,$$

trong đó  $k$  là hằng số,  $R$  là bán kính bình thường của khí quản,  $r$  là bán kính khí quản khi ho.

Hỏi bán kính khí quản khi ho bằng bao nhiêu thì tốc độ của không khí đi vào khí quản là lớn nhất?

**Lời giải**

Ta có  $V = kRr^2 - kr^3$

$$V' = 2kRr - 3kr^2, V' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = \frac{2R}{3} \end{cases}$$

BBT

|    |   |                    |   |
|----|---|--------------------|---|
| r  | 0 | $\frac{2R}{3}$     | R |
| V' | 0 | +                  | 0 |
| V  | 0 | $\frac{4kR^3}{27}$ | 0 |

Từ BBT ta có bán kính khí quản khi ho bằng  $\frac{2R}{3}$  thì tốc độ của không khí đi vào khí quản là lớn nhất

**Câu 16. (TH)** Tại trường THPT  $Y$ , để giảm nhiệt độ trong các phòng học từ nhiệt độ ban đầu là  $28^\circ\text{C}$ , một hệ thống điều hòa làm mát được phép hoạt động trong 10 phút. Gọi  $T$  (đơn vị  $^\circ\text{C}$ ) là nhiệt độ phòng ở phút thứ  $t$  (tính từ thời điểm bật máy) được cho bởi công thức

$T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$  ( $t \in [0;10]$ ). Nhiệt độ thấp nhất trong phòng có thể đạt được trong khoảng thời gian 10 phút đó gần đúng là:.....

**Lời giải**

**Đáp số: 18,4**

Xét hàm số  $f(t) = -0,008t^3 - 0,16t + 28$  trên đoạn  $[0;10]$ .

Ta có :  $f'(t) = -0,024t^2 - 0,16 < 0, \forall t \in [0;10]$ .

Do đó  $\min_{[0;10]} f(t) = f(10) \approx 18.4$ .

Vậy nhiệt độ thấp nhất trong phòng có thể đạt được trong khoảng thời gian 10 phút đó gần đúng là  $18,4^\circ$ .

**Câu 17. (TH)** Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. độ sâu  $h(m)$  của mực nước trong kênh tính theo thời gian  $t(h)$  trong ngày cho bởi công thức  $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12$ . Khi nào mực nước của kênh là cao nhất với thời gian ngắn nhất?

- A.**  $t = 10(h)$       **B.**  $t = 14(h)$       **C.**  $t = 15(h)$       **D.**  $t = 22(h)$

**Câu 18. (VD)** Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được  $x$  mét vải lụa ( $1 \leq x \leq 18$ ). Tổng chi phí sản xuất  $x$  mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí:

$C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500$ . Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi  $B(x)$  là số tiền bán được và  $L(x)$  là lợi nhuận thu được khi bán  $x$  mét vải lụa.

- a)** Biểu thức tính  $B(x)$  theo  $x$  là  $B(x) = 220x$  (nghìn đồng).  
**b)** Biểu thức tính  $L(x)$  theo  $x$  là  $L(x) = -x^3 + 3x^2 + 220x - 500$  (nghìn đồng).  
**c)** Hộ làm nghề dệt này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày 10 mét vải lụa để thu được lợi nhuận tối đa  
**d)** Lợi nhuận tối đa của hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm có thể đạt được là 1000 nghìn đồng.

**Câu 19. (TH)** Hằng ngày mực nước của hồ thủy điện ở miền Trung lên và xuống theo lượng nước mưa và các suối nước đổ về hồ. Tính từ thời điểm 8 giờ sáng, độ sâu của mực nước trong hồ tính theo mét và lên xuống theo thời gian  $t$  (giờ) trong ngày cho bởi công thức:

$h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 24t$  ( $t > 0$ ). Biết rằng phải thông báo cho các hộ dân phải di dời trước

khi xả nước theo quy định trước 5 giờ. Hỏi cần thông báo cho hộ dân di dời trước khi xả nước mấy giờ. Biết rằng mực nước trong hồ phải lên cao nhất mới xả nước.

### Lời giải

Ta có:  $h'(t) = -t^2 + 10t + 24$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow -t^2 + 10t + 24 = 0 \Leftrightarrow t = 12$$

Bảng biến thiên:

| $t$     | 0 | 12         | $+\infty$ |
|---------|---|------------|-----------|
| $h'(t)$ |   | 0          |           |
|         |   | +          | -         |
| $h(t)$  |   | $h_{\max}$ |           |

Để mực nước lên cao nhất thì phải mất 12 giờ, Khi đó 20 giờ nước đầy. Vậy phải thông báo cho dân di dời vào 15 giờ chiều cùng ngày.

**Câu 20. (VD)** Giả sử hàm cầu của một sản phẩm độc quyền được cho bởi  $P = 400 - 2Q$  và hàm chi phí trung bình  $\bar{C} = 0,2Q + 4 + \frac{400}{Q}$  trong đó  $Q$  là số đơn vị sản phẩm ( $P$  và  $\bar{C}$  được tính bằng \$ đối với mỗi đơn vị sản phẩm).

- a)  $Q = 90$  là lượng sản phẩm bán ra để lợi nhuận thu được tối đa;  
 b) Giá bán để lợi nhuận thu được tối đa là 400\$  
 c) Lợi nhuận tối đa là 17420\$  
 d) Nếu chính phủ đánh thuế 22\$ / một đơn vị sản phẩm thì giá bán 390\$ để lợi nhuận thu được tối đa

**Câu 21. (VD)** Giả sử số lượng tế bào của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hóa bằng hàm số  $P(t) = \frac{a}{b + e^{-0,75t}}$  trong đó thời gian  $t$  được tính bằng giờ, các hằng số  $a, b \in \mathbb{R}$ , đồng thời đạo hàm  $P'(t)$  biểu thị tốc độ gia tăng tế bào. Tại thời điểm ban đầu  $t = 0$ , quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 10 tế bào/giờ. Khi đó tính  $a + b$

**Lời giải**

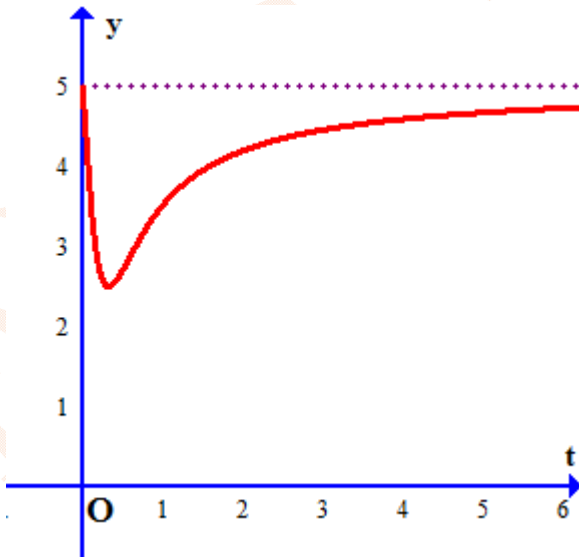
$$\text{Ta có } P'(t) = \frac{0,75ae^{-0,75t}}{(b + e^{-0,75t})^2}, t \geq 0.$$

Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} P(0) = 20 \\ P'(0) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b+1} = 20 \\ \frac{0,75a}{(b+1)^2} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 20(b+1) \\ \frac{15}{b+1} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 30 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

**Câu 22. (VD)** Sự phân huỷ của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hoà tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau  $t$  giờ ( $t \geq 0$ ) khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xấp xỉ bởi hàm số (có đồ thị như đường màu đỏ ở hình bên)

$$y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$$



- a) Vào thời điểm  $t = 1$  thì nồng độ oxygen trong nước là 3,5 (mg/l)  
 b) Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước không vượt quá 5 (mg/l)  
 c) Vào thời điểm  $t = 0$  thì nồng độ oxygen trong nước cao nhất  
 d) Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước thấp nhất là 3,5 (mg/l)  
 Ở nhiệt độ bao nhiêu độ C thì nước có khối lượng riêng lớn nhất?

- Câu 23. (VD)** Một hãng điện thoại đưa ra quy luật bán buôn cho từng đại lí, đó là đại lí càng nhập nhiều chiếc điện thoại của hãng thì giá bán buôn một chiếc điện thoại càng giảm. Cụ thể, nếu đại lí mua  $x$  điện thoại thì giá tiền của mỗi điện thoại là  $6000 - 3x$  (nghìn đồng),  $x \in N^*, x < 2000$ . Đại lí nhập cùng một lúc bao nhiêu chiếc điện thoại thì hãng có thể thu về nhiều tiền nhất từ đại lí đó?

**Lời giải**

**Đáp số: 1000**

Số tiền hãng thu được khi đại lí nhập  $x$  chiếc điện thoại là  $f(x) = x(6000 - 3x)$ .

Ta có:  $f'(x) = -6x + 6000$ . Khi đó,  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1000$

Bảng biến thiên của hàm số  $f(x)$  là:

|         |   |         |      |
|---------|---|---------|------|
| $x$     | 0 | 1000    | 2000 |
| $f'(x)$ | + | 0       | -    |
| $f(x)$  | 0 | 3000000 | 0    |

Vậy đại lí nhập cùng lúc 1000 chiếc điện thoại thì hãng có thể thu nhiều tiền nhất từ đại lí đó với 3 000 000 000 (đồng).

- Câu 24. (VD)** Hằng ngày mực nước của hồ thủy điện ở miền Trung lên và xuống theo lượng nước mưa, và các suối nước đổ về hồ. Từ lúc 8h sáng, độ sâu của mực nước trong hồ tính theo mét và lên xuống theo thời gian  $t$  (giờ) trong ngày cho bởi công thức  $h(t) = 24t + 5t^2 - \frac{t^3}{3}$ . Biết rằng phải thông báo cho các hộ dân phải di dời trước khi xả nước theo quy định trước 5 giờ. Hỏi cần thông báo cho hộ dân di dời trước khi xả nước mấy giờ. Biết rằng mực nước trong hồ phải lên cao nhất mới xả nước.

**Lời giải**

**Đáp số: 15**

Ta có:

$$h'(t) = 24 + 10t - t^2$$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow 24 + 10t - t^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \text{ (loại)} \\ t = 12 \text{ (t/m)} \end{cases}$$

BBT:

|         |   |                     |            |           |
|---------|---|---------------------|------------|-----------|
| $t$     | 8 | 12                  | 24         | $+\infty$ |
| $h'(t)$ | + | 0                   | -          |           |
| $h(t)$  |   | $\nearrow h_{\max}$ | $\searrow$ |           |

Vậy để mực nước lên cao nhất thì phải mất 12 giờ. Vậy phải thông báo cho dân di dời vào 15 giờ chiều cùng ngày.

- Câu 25. (VD)** Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số  $P(t) = \frac{a}{b + e^{-0,75t}}$ , trong đó thời gian  $t$  được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu  $t = 0$ , quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Tìm các giá trị của  $a$  và  $b$ . Theo mô hình này, số lượng nấm men không vượt quá bao nhiêu?

## Lời giải

Ta có:  $P'(t) = \frac{0,75ae^{-0,75t}}{(b + e^{-0,75t})^2}, t \geq 0.$

Theo đề bài, ta có:  $P(0) = 20$  và  $P'(0) = 12$ . Do đó, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{a}{b+1} = 20 \\ \frac{0,75a}{(b+1)^2} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 20(b+1) \\ \frac{15}{b+1} = 12. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta được  $a = 25$  và  $b = \frac{1}{4}$ .

Khi đó,  $P'(t) = \frac{18,75e^{-0,75t}}{\left(\frac{1}{4} + e^{-0,75t}\right)^2} > 0, \forall t \geq 0$ , tức là số lượng quần thể nấm men luôn tăng.

Tuy nhiên, do  $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25}{\frac{1}{4} + e^{-0,75t}} = 100$  nên số lượng quần thể nấm men tăng nhưng

không vượt quá 100 tế bào.

**Dạng 3: Toán thực tế thiết lập hàm****Phương pháp:**

**B1:** Gọi ẩn theo yêu cầu bài toán, đặt ĐK ẩn

**B2:** Chuyển các đại lượng còn lại theo ẩn.

**B3:** Lập hàm số một ẩn

**B4:** Tìm GTLN, GTNN theo cách giải TL hoặc MTCT

**Loại 1: Thiết lập hàm liên quan đến hình học phẳng.**

**Câu 26.** (TH) Trong số các hình chữ nhật có cùng chu vi 16 cm, hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng:

A. 64 cm<sup>2</sup>.

B. 4 cm<sup>2</sup>.

C. 16 cm<sup>2</sup>.

D. 8 cm<sup>2</sup>.

**Lời giải****Chọn C**

**Cách 1:** Gọi cạnh của hình chữ nhật:  $a, b$ ;  $0 < a, b < 8$ .

Ta có:  $2(a+b) = 16 \Leftrightarrow a+b = 8 \Leftrightarrow b = 8-a$

Diện tích:  $S(a) = a(8-a) = -a^2 + 8a$ ;  $S'(a) = -2a + 8$ ;  $S'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 4$

Bảng biến thiên:

|         |   |    |   |   |
|---------|---|----|---|---|
| $a$     | 0 | 4  | 8 |   |
| $S'(a)$ |   | +  | 0 | - |
| $S(a)$  | 0 | 16 | 0 |   |

**Cách 2**

Áp dụng Côsi:  $a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow ab \leq 16$

Dấu “=” xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = 4$

**Câu 27. (VD)** Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích  $48 \text{ cm}^2$ , hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất bằng:

A.  $16\sqrt{3} \text{ cm}$

B.  $4\sqrt{3} \text{ cm}$

C.  $24 \text{ cm}$

D.  $8\sqrt{3} \text{ cm}$

Lời giải

Chọn A

Cách 1

Gọi cạnh của hình chữ nhật:  $a, b$ ;  $0 < a, b \leq 48$ Ta có:  $ab = 48 \Leftrightarrow b = \frac{48}{a}$ . Chu vi:  $P(a) = 2\left(a + \frac{48}{a}\right)$ 

$$P'(a) = 2\left(1 - \frac{48}{a^2}\right); P'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 4\sqrt{3}$$

Bảng biến thiên:

|         |   |              |    |
|---------|---|--------------|----|
| $a$     | 0 | $4\sqrt{3}$  | 48 |
| $P'(a)$ |   | -            | +  |
| $P(a)$  |   | $16\sqrt{3}$ |    |

Cách 2

□ Áp dụng bất đẳng thức Côsi:  $a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b \geq 2\sqrt{48} = 8\sqrt{3}$ ⇔ chu vi nhỏ nhất:  $2(a + b) = 16\sqrt{3}$ □ Hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất bằng  $16\sqrt{3}$  khi cạnh bằng  $4\sqrt{3}$ .

**Câu 28. (VD)** Một trang sách có dạng hình chữ nhật với diện tích là  $384 \text{ cm}^2$ . Sau khi để lề trên và lề dưới đều là  $3 \text{ cm}$ , để lề trái và lề phải đều là  $2 \text{ cm}$ . Phần còn lại của trang sách được in chữ. Kích thước tối ưu của trang sách là bao nhiêu để phần in chữ trên trang sách có diện tích lớn nhất?

Lời giải

Gọi chiều dài và chiều rộng trang sách lần lượt là  $x(\text{cm})$  và  $y(\text{cm})$ ,  $(0 < x, y \leq 384)$ .Diện tích trang sách là  $S = xy = 384 \Rightarrow y = \frac{384}{x}$ .Diện tích phần trang sách để in chữ là  $S_1 = (x - 6)(y - 4) = (x - 6)\left(\frac{384}{x} - 4\right)$ .Ta có  $S_1 = 408 - \frac{2304}{x} - 4x \Rightarrow S_1' = -4 + \frac{2304}{x^2} = 0 \Leftrightarrow -4x^2 + 2304 = 0 \Rightarrow x = 24, (0 < x \leq 384)$ Bảng xét dấu  $S' = -4x^2 + 2304, (0 < x \leq 384)$ 

|        |   |     |     |
|--------|---|-----|-----|
| $x$    | 0 | 24  | 384 |
| $S_1'$ |   | +   | -   |
| $S_1$  |   | 312 |     |

Vậy  $S_1$  lớn nhất khi  $x = 24$ .Vậy kích thước của trang sách là: chiều dài  $24 \text{ cm}$ , chiều rộng  $16 \text{ cm}$ .

**Câu 29. (VD)** Có một tấm gỗ hình vuông cạnh 200 cm. Cắt một tấm gỗ có hình tam giác vuông, có tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số 120 cm từ tấm gỗ trên sao cho tấm gỗ hình tam giác vuông có diện tích lớn nhất. Hỏi cạnh huyền của tấm gỗ này là bao nhiêu?

**Lời giải**

**Đáp án:** cạnh huyền của tấm gỗ này là 80cm

Kí hiệu cạnh góc vuông  $AB = x, 0 < x < 60$

Khi đó cạnh huyền  $BC = 120 - x$ , cạnh góc vuông kia là  $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{120^2 - 240x}$

Diện tích tam giác ABC là:  $S(x) = \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{120^2 - 240x}$ . Ta tìm giá trị lớn nhất của hàm số này trên khoảng  $(0; 60)$

Ta có  $S'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{120^2 - 240x} + \frac{1}{2}x \cdot \frac{-240}{2\sqrt{120^2 - 240x}} = \frac{14400 - 360x}{2\sqrt{120^2 - 240x}} \Rightarrow S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 40$

Lập bảng biến thiên ta có:

|         |   |         |     |
|---------|---|---------|-----|
| $x$     | 0 | 40      | 60  |
| $S'(x)$ |   | +       | 0 - |
| $S(x)$  |   | $S(40)$ |     |

Tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi  $BC = 80$ .

Vậy cạnh huyền của tấm gỗ này là 80cm

**Câu 30. (TH)** Tam giác vuông có diện tích lớn nhất là bao nhiêu nếu tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số  $a$  ( $a > 0$ )?

**A.**  $\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$

**B.**  $\frac{a^2}{9}$

**C.**  $\frac{2a^2}{9}$

**D.**  $\frac{a^2}{3\sqrt{3}}$

**Lời giải**

**Chọn A**

Cạnh góc vuông  $x, 0 < x < \frac{a}{2}$ ; cạnh huyền:  $a - x$

Cạnh góc vuông còn lại là:  $\sqrt{(a-x)^2 - x^2}$

Diện tích tam giác  $S(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - 2ax}$ .  $S'(x) = \frac{a(a-3x)}{2\sqrt{a^2 - 2ax}}$ ;  $S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{3}$

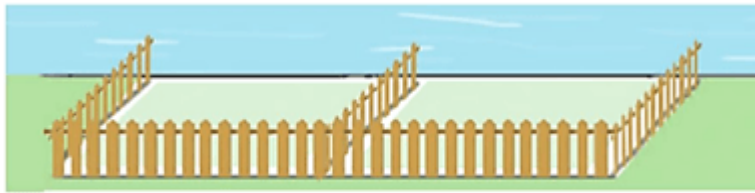
Bảng biến thiên:

|         |   |                         |               |
|---------|---|-------------------------|---------------|
| $x$     | 0 | $\frac{a}{3}$           | $\frac{a}{2}$ |
| $S'(x)$ |   | +                       | 0 -           |
| $S(x)$  |   | $\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$ |               |

Tam giác có diện tích lớn nhất bằng  $\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$  khi cạnh góc vuông  $\frac{a}{3}$ , cạnh huyền  $\frac{2a}{3}$ .

**Câu 31. (VD)** Một người nông dân có 15 000 000 đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau (Hình 35). Đối

với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60 000 đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng/mét, mặt giáp bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.



Hình 35

Lời giải



Gọi chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn lần lượt là  $y$  và  $x$ , ( $x > 0$ ,  $y > 0$ ).

Diện tích mảnh vườn là  $S = xy$ .

Chi phí để rào mảnh vườn theo chữ E là:  $T = 3x \cdot 50\,000 + y \cdot 60\,000 = 150\,000\,000$

$$\Leftrightarrow 15x + 6y = 1500 \Leftrightarrow 5x + 2y = 500 \Rightarrow y = \frac{500 - 5x}{2} \quad (x < 100) \Rightarrow S = x \left( \frac{500 - 5x}{2} \right).$$

Ta có  $S' = 250 - 5x = 0 \Leftrightarrow x = 50$ .

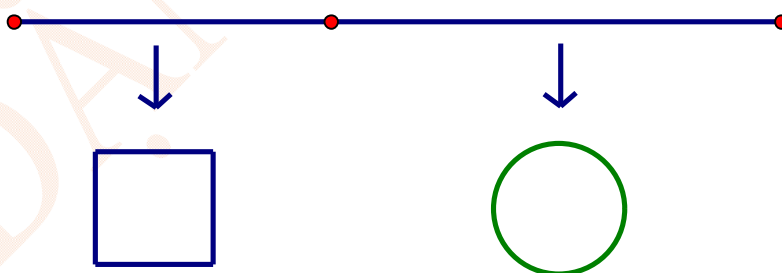
Bảng xét dấu

|      |   |    |      |   |
|------|---|----|------|---|
| $x$  | 0 | 50 | 100  |   |
| $S'$ |   | +  | 0    | - |
| $S$  |   |    | 6250 |   |

Để diện tích mảnh vườn thu được sau khi rào lớn nhất thì  $x = 50 \Rightarrow y = 125$ .

Vậy diện tích lớn nhất của mảnh vườn là  $6250 \text{ m}^2$ .

**Câu 32. (VD)** Một sợi dây kim loại dài  $60\text{cm}$  được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh  $a$ , đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn bán kính  $r$ .



a)  $r = \frac{60 - 2a}{\pi}$ .

b) Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là  $\frac{1}{\pi} [(\pi + 4)a^2 - 120a + 900]$ .

c) Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn nhỏ nhất thì tỉ số  $\frac{a}{r}$  bằng  $\frac{1}{2}$ .

**d)** Nếu cắt sợi dây thành hai đoạn bằng nhau và vắn uốn thành một hình vuông và một hình tròn thì hình tròn có diện tích lớn hơn hình vuông.

**Lời giải**

**(a) Sai; (b) Đúng; (c) Sai; (d) Sai**

**(a)** Ta có:

$$4a + 2\pi r = 60 \Leftrightarrow \pi r = 30 - 2a \Leftrightarrow r = \frac{30 - 2a}{\pi}.$$

**SAI.**

**(b)** Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn:

$$S = a^2 + r^2 \pi = a^2 + \frac{(30 - 2a)^2}{\pi} = \frac{1}{\pi} [(\pi + 4)a^2 - 120a + 900]$$

**ĐÚNG.**

**(c)** Điều kiện:  $0 < 4a < 60 \Leftrightarrow 0 < a < 15$ .

Xét  $f(a) = (\pi + 4)a^2 - 120a + 900$  với  $a \in (0, 15)$

$f(a)$  đạt giá trị nhỏ nhất tại  $a = \frac{120}{2(\pi + 4)} = \frac{60}{\pi + 4} \in (0, 15)$ .

$S$  đạt giá trị nhỏ nhất khi  $a = \frac{60}{\pi + 4}$ .

$$\Rightarrow \pi r = 30 - 2 \cdot \frac{60}{\pi + 4} = \frac{30\pi}{\pi + 4} \Rightarrow r = \frac{30}{\pi + 4}$$

$$\text{Khi đó: } \frac{a}{r} = \frac{60}{\pi + 4} : \frac{30}{\pi + 4} = 2.$$

Kết luận:  $\frac{a}{r} = 2$ .

**SAI**

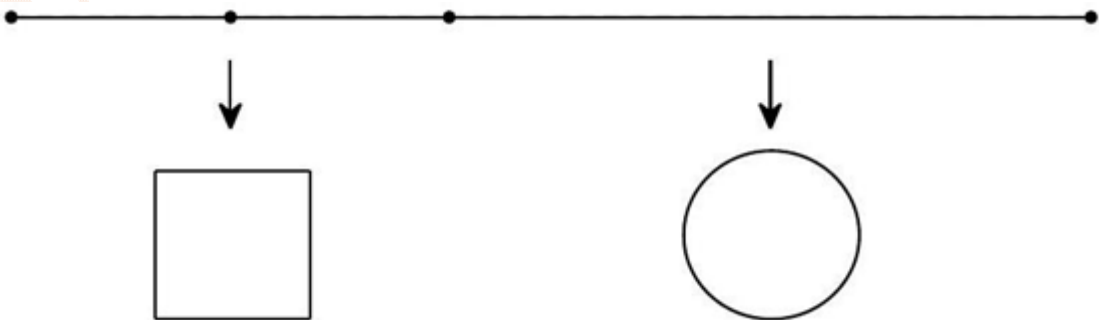
$$\text{(d)} \quad a = \frac{15}{2}, r = \frac{15}{2\pi}.$$

$$\text{Diện tích hình vuông là } S_1 = \left(\frac{15}{2}\right)^2 = \frac{225}{4} = 56,25 \text{ cm}^2$$

$$\text{Diện tích hình tròn là } S_2 = \pi r^2 = \frac{225}{4\pi} \approx 17,9 \text{ cm}^2$$

**SAI.**

**Câu 33. (VD)** Một sợi dây kim loại dài  $a$  (cm). Người ta cắt đoạn dây đó thành hai đoạn có độ dài  $x$  (cm) được uốn thành đường tròn và đoạn còn lại được uốn thành hình vuông ( $a > x > 0$ ).



**a)** Bán kính đường tròn:  $r = \frac{x}{\pi}$ .

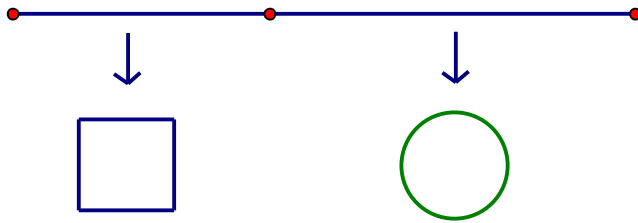
b) Diện tích hình vuông:  $\left(\frac{a-x}{4}\right)^2$ .

c) Tổng diện tích hai hình:  $\frac{(4+\pi) \cdot x^2 - 2a\pi x + \pi a^2}{16\pi}$ .

d) Khi  $x = \frac{a\pi}{2+\pi}$  thì hình vuông và hình tròn tương ứng có tổng diện tích nhỏ nhất.

**Câu 34. (VD)** Một sợi dây kim loại dài  $60dm$  được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình

vuông cạnh  $a$ , đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn bán kính  $r$ . Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn nhỏ nhất thì tỉ số  $\frac{a}{r}$  bằng bao nhiêu?



### Lời giải

Ta có:

\*  $4a + 2\pi r = 60 \Leftrightarrow \pi r = 30 - 2a$

Điều kiện:  $0 < 4a < 60 \Leftrightarrow 0 < a < 15$ .

\* Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn:

$$S = a^2 + r^2 \pi = a^2 + \frac{(30 - 2a)^2}{\pi} = \frac{1}{\pi} [(\pi + 4)a^2 - 120a + 900]$$

\* Xét  $f(a) = (\pi + 4)a^2 - 120a + 900$  với  $a \in (0, 15)$

$f(a)$  đạt giá trị nhỏ nhất tại  $a = \frac{120}{2(\pi + 4)} = \frac{60}{\pi + 4} \in (0, 15)$ .

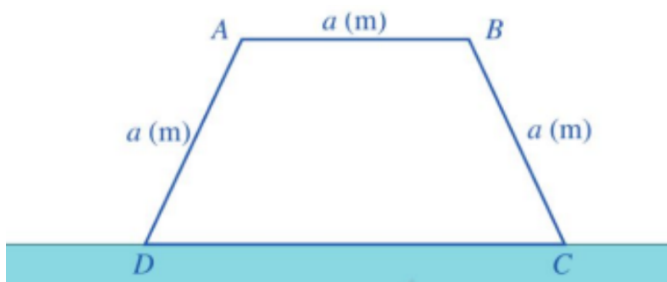
\*  $S$  đạt giá trị nhỏ nhất khi  $a = \frac{60}{\pi + 4}$ .

$$\Rightarrow \pi r = 30 - 2 \cdot \frac{60}{\pi + 4} = \frac{30\pi}{\pi + 4} \Rightarrow r = \frac{30}{\pi + 4}$$

\* Khi đó:  $\frac{a}{r} = \frac{60}{\pi + 4} : \frac{30}{\pi + 4} = 2$ .

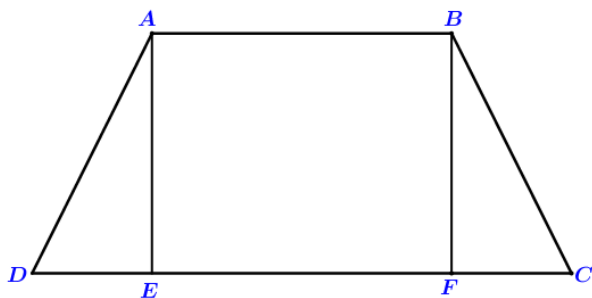
Kết luận:  $\frac{a}{r} = 2dm$ .

**Câu 35. (VD)** Một bác nông dân có ba tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài  $a(m)$  và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân  $ABCD$  như Hình 36 (bờ sông là đường thẳng  $CD$  không phải rào).



Hỏi bác đó có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông?

**Lời giải**



Dựng các đường cao  $AE$  và  $BF$  của hình thang cân  $ABCD$  như hình vẽ trên.

Vì  $ABCD$  là hình thang cân nên  $DE = FC$  và  $EF = AB = a$ .

Đặt  $DE = FC = x(m)$  ( $x > 0$ ).

Ta có  $DC = DE + EF + FC = x + a + x = 2x + a$ .

Theo định lý Pythagore, ta suy ra  $AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$  (m).

Rõ ràng,  $x$  phải thỏa mãn điều kiện  $0 < x < a$ .

Diện tích của hình thang cân  $ABCD$  là

$$S = \frac{1}{2}(AB + CD)AE = \frac{1}{2}(a + 2x + a)\sqrt{a^2 - x^2} = (a + x)\sqrt{a^2 - x^2} \text{ (m}^2\text{)}.$$

Xét hàm số  $S(x) = (a + x)\sqrt{a^2 - x^2}$  với  $x \in (0; a)$ .

$$\text{Ta có } S'(x) = \frac{-2x^2 - ax + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 - ax + a^2 = 0 \Leftrightarrow (x + a)(a - 2x) = 0 \Leftrightarrow x = -a \text{ hoặc } x = \frac{a}{2}.$$

Khi đó trên khoảng  $(0; a)$ ,  $S'(x) = 0$  khi  $x = \frac{a}{2}$ .

Bảng biến thiên của hàm số  $S(x)$  như sau:

| x     | 0     | $\frac{a}{2}$            | a |   |
|-------|-------|--------------------------|---|---|
| S'(x) |       | +                        | 0 | - |
| S(x)  | $a^2$ | $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$ | 0 |   |

Căn cứ vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số  $S(x)$  đạt giá trị lớn nhất bằng  $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$  tại  $x = \frac{a}{2}$ .

Vậy bác đó có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là  $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4} (\text{m}^2)$ .

**Câu 36. (VD)** Cho  $\triangle ABC$  đều cạnh  $a$ . Người ta dựng một hình chữ nhật  $MNPQ$  có cạnh  $MN$  nằm trên  $BC$ , hai đỉnh  $P, Q$  theo thứ tự nằm trên hai cạnh  $AC$  và  $AB$  của tam giác. Xác định vị trí của điểm  $M$  sao cho hình chữ nhật có diện tích lớn nhất?

A.  $BM = \frac{2a}{3}$ .

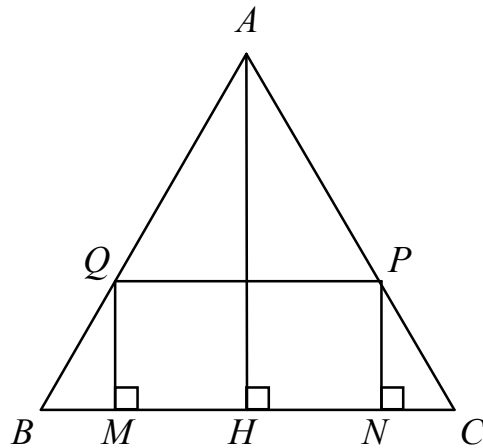
B.  $BM = \frac{3a}{4}$ .

C.  $BM = \frac{a}{3}$ .

**D.**  $BM = \frac{a}{4}$ .

Lời giải

Chọn D



Gọi  $H$  là trung điểm của  $BC \Rightarrow BH = CH = \frac{a}{2}$ .

Đặt  $BM = x \left( 0 < x < \frac{a}{2} \right)$

Ta có:  $MN = 2MH = a - 2x$ ,  $QM = BM \tan 60^\circ = x\sqrt{3}$

Diện tích hình chữ nhật  $MNPQ$  là:

$$S(x) = (a - 2x)x\sqrt{3} = a\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}x^2$$

$$S'(x) = \sqrt{3}(a - 4x), S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{4}$$

Bảng biến thiên:

| $x$     | 0 | $\frac{a}{4}$ | $\frac{a}{2}$           |   |
|---------|---|---------------|-------------------------|---|
| $S'(x)$ |   | +             | 0                       | - |
| $S(x)$  |   |               | $\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$ |   |

Vị trí điểm  $M$ :  $BM = \frac{a}{4}$

**Câu 37. (VD)** Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính  $10\text{cm}$ , biết một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc trên đường kính của đường tròn.

A.  $80\text{cm}^2$

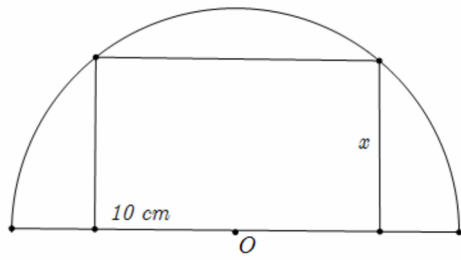
**B.**  $100\text{cm}^2$

C.  $160\text{cm}^2$

D.  $200\text{cm}^2$

Lời giải

Chọn B



Gọi  $x(cm)$  là độ dài cạnh hình chữ nhật không nằm dọc theo đường kính đường tròn ( $0 < x < 10$ ).

Khi đó độ dài cạnh hình chữ nhật nằm dọc trên đường tròn là:  $2\sqrt{10^2 - x^2}$  (cm).

Diện tích hình chữ nhật:  $S = 2x\sqrt{10^2 - x^2}$

Ta có  $S' = 2\sqrt{10^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{10^2 - x^2}} = 2.10^2 - 4x^2$

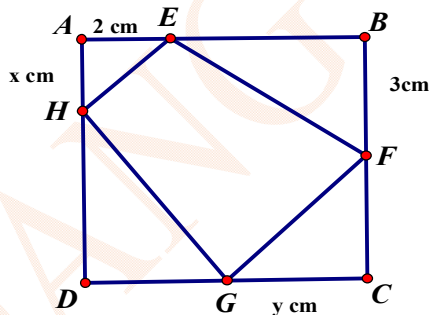
$$S' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10\sqrt{2}}{2} & (\text{thỏa}) \\ x = -\frac{10\sqrt{2}}{2} & (\text{không thỏa}) \end{cases}$$

$$S'' = -8x \Rightarrow S''\left(\frac{10\sqrt{2}}{2}\right) = -40\sqrt{2} < 0.$$

Suy ra  $x = \frac{10\sqrt{2}}{2}$  là điểm cực đại của hàm  $S(x)$ .

Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật là:  $S = 10\sqrt{2} \cdot \sqrt{10^2 - \frac{10^2}{2}} = 100$  (cm<sup>2</sup>)

**Câu 38. (VD)** Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6 cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ.



Tìm tổng  $x + y$  để diện tích hình thang EFGH đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. 7                      B. 5                      C.  $\frac{7\sqrt{2}}{2}$                       D.  $4\sqrt{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có  $S_{EFGH}$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow S = S_{AEH} + S_{CGF} + S_{DGH}$  lớn nhất.

Tính được  $2S = 2x + 3y + (6 - x)(6 - y) = xy - 4x - 3y + 36$  (1)

Mặt khác  $\triangle AEH$  đồng dạng  $\triangle CGF$  nên  $\frac{AE}{CG} = \frac{AH}{CF} \Rightarrow xy = 6$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $2S = 42 - (4x + \frac{18}{x})$ .

Ta có  $2S$  lớn nhất khi và chỉ khi  $4x + \frac{18}{x}$  nhỏ nhất.

Biểu thức  $4x + \frac{18}{x}$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow 4x = \frac{18}{x} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = 2\sqrt{2}$ .

Vậy đáp án cần chọn là (C)

**Câu 39. (VD)** Từ một bờ tường có sẵn, người ta muốn rào quanh một khu đất với một số vật liệu cho trước là 100 m thẳng hàng rào. Vậy làm thế nào để rào khu đất ấy theo hình chữ nhật sao cho có diện tích lớn nhất. Khi đó: chiều dài và chiều rộng hình chữ nhật là

**A.** và

**B.** 35 và 35

**C.** 75 và 25

**D.** 50 và 50

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi  $x$  (m) ( $0 < x < 50$ ) là chiều rộng của hình chữ nhật

Khi đó, chiều dài của hình chữ nhật là  $100 - 2x$

Nên diện tích của hình chữ nhật là  $x(100 - 2x) = -2x^2 + 100x$

Gọi  $f(x) = -2x^2 + 100x$  với điều kiện  $0 < x < 100$

$\Rightarrow f'(x) = -4x + 100$ . Cho  $f'(x) = 0 \Rightarrow -4x + 100 = 0 \Rightarrow x = 25$

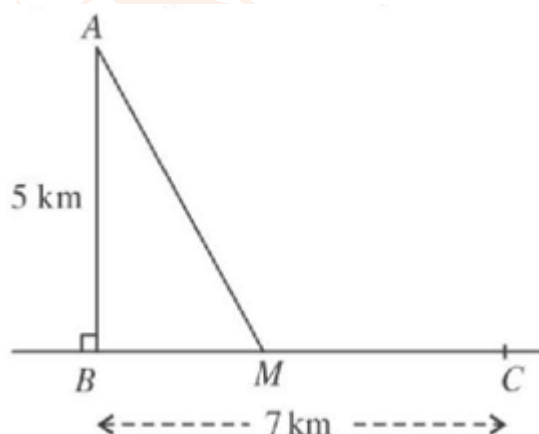
Bảng biến thiên:

|         |   |      |    |
|---------|---|------|----|
| $x$     | 0 | 25   | 50 |
| $f'(x)$ | + | 0    | -  |
| $f(x)$  | 0 | 1250 | 0  |

Dựa vào bảng biến thiên ta có  $\max_{(0;50)} f(x) = f(25) = 1250$

Vậy: Để rào khu đất ấy có diện tích lớn nhất theo hình chữ nhật có chiều rộng bằng 25 và chiều dài bằng 50

**Câu 40. (VD)** Một ngọn hải đăng được đặt tại vị trí  $A$  cách bờ biển một khoảng  $AB = 5$  km. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí  $C$  cách  $B$  một khoảng  $BC = 7$  km (tham khảo hình vẽ).



Người canh hải đăng có thể chèo đò từ vị trí  $A$  đến vị trí  $M$  trên bờ biển với vận tốc 4 km/h và đi bộ đến kho  $C$  với vận tốc 6 km/h.

Đặt  $BM = x$  với  $0 < x < 7$ . Khi đó:

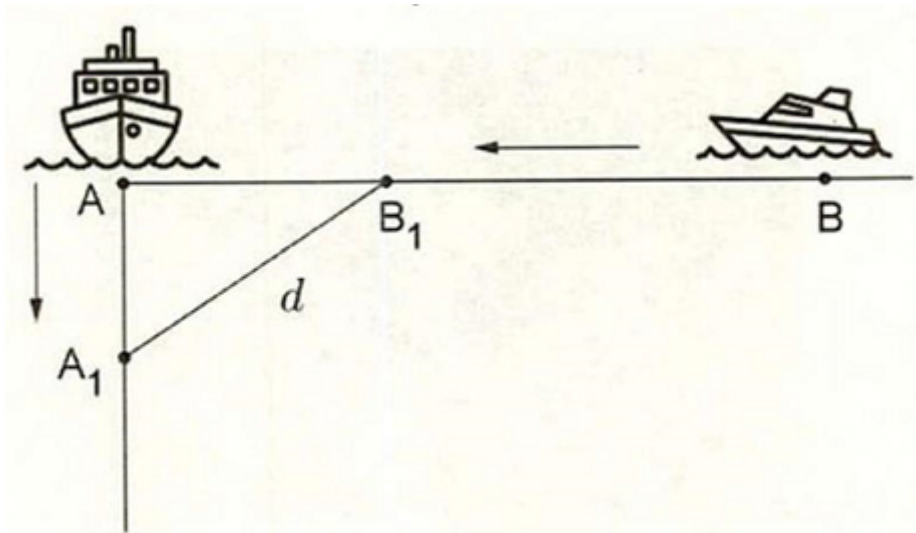
a) Thời gian đi từ  $A$  đến  $M$  là  $\frac{\sqrt{25+x^2}}{4}$ .

b) Thời gian đi từ  $A$  đến  $C$  là  $\frac{\sqrt{25+x^2}}{4} + \frac{7-x}{6}$ .

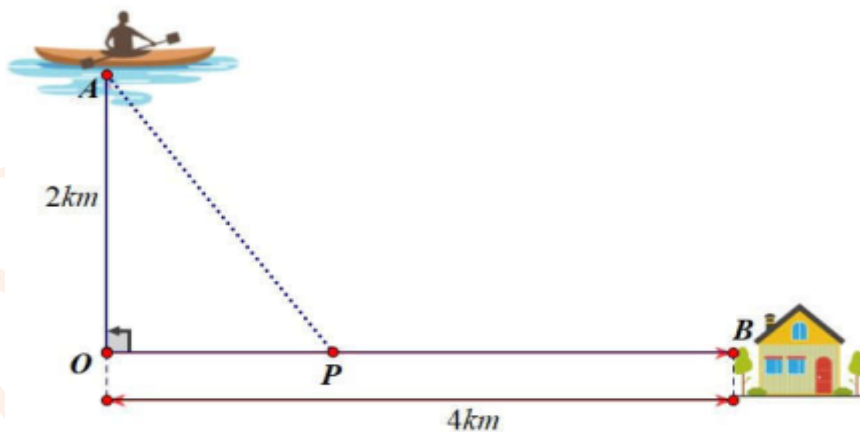
c) Thời gian ngắn nhất từ  $A$  đến  $C$  là khoảng  $3h06$  phút.

d) Muốn nhất  $3h54$  phút người đó phải xuất phát từ vị trí  $A$  để có mặt tại kho  $C$  lúc 7 giờ sáng

**Câu 41. (VD)** Hai con tàu  $A$  và  $B$  đang ở cùng một vĩ tuyến và cách nhau 5 hải lí. Cả hai tàu đồng thời cùng khởi hành. Tàu  $A$  chạy về hướng Nam với 6 hải lí/giờ, còn tàu  $B$  chạy về vị trí hiện tại của tàu  $A$  với vận tốc 7 hải lí/giờ. Hỏi sau bao lâu thì khoảng cách giữa hai tàu là bé nhất?



**Câu 42. (VD)** Anh Ba đang trên chiếc thuyền tại vị trí  $A$  cách bờ sông  $2km$ , anh dự định chèo thuyền vào bờ và tiếp tục chạy bộ theo một đường thẳng để đến một địa điểm  $B$  tọa lạc ven bờ sông,  $B$  cách vị trí  $O$  trên bờ gần với thuyền nhất là  $4km$  (hình vẽ). Biết rằng anh Ba chèo thuyền với vận tốc  $6m/h$  và chạy bộ trên bờ với vận tốc  $10km/h$ . Khoảng thời gian ngắn nhất để anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm  $B$  là



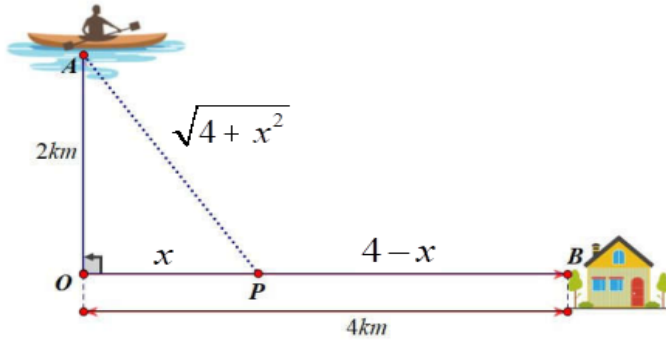
A. 40 phút.

B. 44 phút.

C. 30 phút.

D. 38 phút.

Lời giải



Đặt  $OP = x$  ( $0 < x < 4$ )  $\Rightarrow BP = 4 - x$ ;  $AP = \sqrt{4 + x^2}$ .

Khoảng thời gian để anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là:

$$t_{(x)} = t_{AP} + t_{PB} = \frac{\sqrt{4+x^2}}{6} + \frac{4-x}{10} \text{ (h)}. \Rightarrow t'_{(x)} = \frac{x}{6\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{10}.$$

$$t'_{(x)} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{6\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{10} = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{4+x^2} = 5x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 4 \\ 4x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

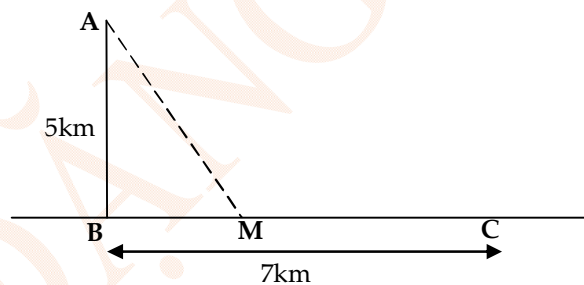
BBT:

|         |   |               |   |
|---------|---|---------------|---|
| $x$     | 0 | $\frac{3}{2}$ | 4 |
| $t'(x)$ |   | 0             |   |
| $t(x)$  |   |               |   |

Từ BBT suy ra khoảng thời gian ngắn nhất để anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là:

$$t_{\min} = \frac{2}{3} \text{ (h)} = \frac{2}{3} \cdot 60 = 40 \text{ (phút)}.$$

**Câu 43. (VD)** Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng AB 5km. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là 7km. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến điểm M trên bờ biển với vận tốc 4km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6km/h (xem hình vẽ dưới đây).



Tính độ dài đoạn BM để người đó đến kho nhanh nhất.

A.  $\frac{\sqrt{74}}{4}$

B.  $\frac{29}{12}$

C.  $\sqrt{29}$

**D.  $2\sqrt{5}$**

Lời giải

**Chọn D**

Trước tiên, ta xây dựng hàm số  $f(x)$  là hàm số tính thời gian người canh hải đăng phải đi.

Đặt  $BM = x$  thì ta được:  $MC = 7 - x$ ,  $AM = \sqrt{x^2 + 25}$ . Theo đề bài, Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến điểm M trên bờ biển với vận tốc 4km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6km/h, như vậy ta có hàm số  $f(x)$  được xác định như sau:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{4} + \frac{7 - x}{6} = \frac{3\sqrt{x^2 + 25} - 2x + 14}{12} \text{ với } x \in [0; 7]$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của  $f(x)$  để có được thời gian ngắn nhất và từ đó xác định được vị trí điểm M.

$$f'(x) = \frac{1}{12} \left( \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 25}} - 2 \right).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 25}} - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x - 2\sqrt{x^2 + 25} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + 25} = 3x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 = 100 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2\sqrt{5} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{5}.$$

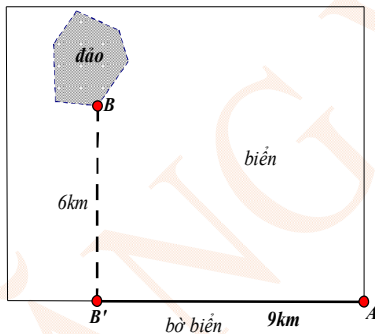
Hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0; 7]$  và ta có:

$$f(0) = \frac{29}{12}, f(2\sqrt{5}) = \frac{14 + 5\sqrt{5}}{12}, f(7) = \frac{\sqrt{74}}{4}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $f(x)$  là  $\frac{14 + 5\sqrt{5}}{12}$  tại  $x = 2\sqrt{5}$ . Khi đó thời gian đi là ít nhất và điểm

M nằm cách B một đoạn  $BM = x = 2\sqrt{5}$ .

**Câu 44. (VD)** Một công ty xây dựng muốn làm một đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ đến một điểm B trên một hòn đảo (như hình vẽ).



Hòn đảo cách bờ biển 6km. Giá để xây đường ống trên bờ là 50.000USD mỗi km, và 130.000USD mỗi km để xây dưới nước. B' là điểm trên bờ biển sao cho  $BB'$  vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến B' là 9km. Vị trí C trên đoạn  $AB'$  sao cho khi nối ống theo  $ACB$  thì số tiền ít nhất. Khi đó C cách A một đoạn bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

**Đáp án:** C cần cách A một khoảng 6,5km.

Đặt  $x = B'C$  (km),  $x \in [0; 9]$

$$BC = \sqrt{x^2 + 36}; AC = 9 - x$$

Chi phí xây dựng đường ống là  $C(x) = 130.000\sqrt{x^2 + 36} + 50.000(9 - x)$  (USD)

Hàm  $C(x)$ , xác định, liên tục trên  $[0; 9]$  và  $C'(x) = 10000 \cdot \left( \frac{13x}{\sqrt{x^2 + 36}} - 5 \right)$

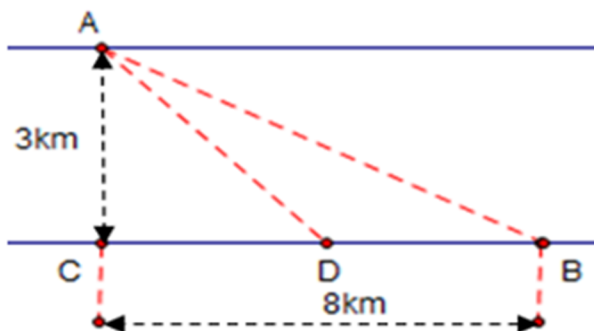
$$C'(x) = 0 \Leftrightarrow 13x = 5\sqrt{x^2 + 36} \Leftrightarrow 169x^2 = 25(x^2 + 36) \Leftrightarrow x^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$C(0) = 1.230.000; C\left(\frac{5}{2}\right) = 1.170.000; C(9) \approx 1.406.165$$

Vậy chi phí thấp nhất khi  $x = 2,5$ .

Vậy  $C$  cần cách  $A$  một khoảng 6,5km.

**Câu 45. (VD)** Anh An muốn di chuyển từ vị trí  $A$  đến điểm  $B$  càng nhanh càng tốt (như hình vẽ). Để di chuyển từ vị trí  $A$  đến điểm  $B$  anh An có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến  $C$  và sau đó chạy đến  $B$ , hay có thể chèo thuyền trực tiếp đến  $B$ , hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm  $D$  nằm giữa  $B$  và  $C$  sau đó chạy đến  $B$ . Biết anh ấy có thể chèo thuyền với vận tốc 6km/h, chạy với vận tốc 8km/h,  $AC = 3\text{km}$ ,  $BC = 8\text{km}$  và vận tốc dòng nước là không đáng kể so với vận tốc chèo thuyền của anh An. Tìm khoảng thời gian nhanh nhất (đơn vị: giờ) để anh An đến  $B$  (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).



**Lời giải**

**Đáp số: 1,33**

Đặt  $CD = x$  (km) ( $0 \leq x \leq 8$ ),  $AD = \sqrt{9 + x^2}$

Giả sử để đi từ  $A$  đến  $B$  anh An bơi thuyền từ  $A$  tới  $D$  sau đó chạy đến  $B$ .

Thời gian bơi thuyền từ  $A$  tới  $D$  là:  $\frac{\sqrt{9+x^2}}{6}$ , thời gian đi từ  $D$  tới  $B$  là:  $\frac{8-x}{8}$ .

Tổng thời gian là:  $f(x) = \frac{\sqrt{9+x^2}}{6} + \frac{8-x}{8}$ ;

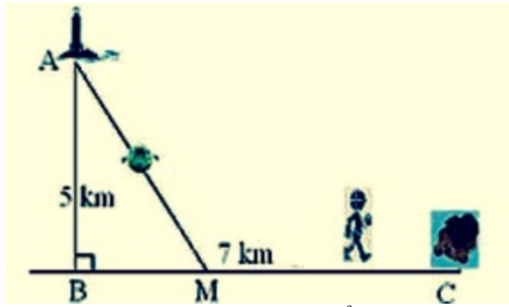
$$f'(x) = \frac{x}{6\sqrt{9+x^2}} - \frac{1}{8}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9}{\sqrt{7}} \in [0; 8].$$

|         |               |                          |                       |
|---------|---------------|--------------------------|-----------------------|
| $x$     | 0             | $\frac{9}{\sqrt{7}}$     | 8                     |
| $f'(x)$ | -             | 0                        | +                     |
| $f(x)$  | $\frac{3}{2}$ | $1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$ | $\frac{\sqrt{73}}{6}$ |

Từ bảng biến thiên, ta có  $\min_{[0;8]} f(x) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$ .

Vậy thời gian nhanh nhất để anh An đi từ  $A$  đến  $B$  là  $1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1,33$ .

**Câu 46. (VD)** Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí  $A$  có khoảng cách đến bờ biển  $AB = 5\text{km}$ . Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí  $C$  cách  $B$  một khoảng 7km (như hình vẽ).



Người canh hải đăng có thể chèo đò từ  $A$  đến  $M$  trên bờ biển với vận tốc  $4\text{ km/h}$  rồi đi bộ đến  $C$  với vận tốc  $6\text{ km/h}$ . Vị trí của điểm  $M$  cách  $B$  một khoảng bao nhiêu để người đó đi đến kho nhanh nhất?

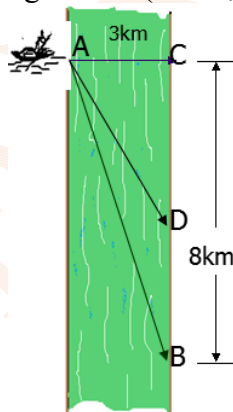
A.  $0\text{ km}$ B.  $7\text{ km}$ C.  $2\sqrt{5}\text{ km}$ D.  $\frac{14+5\sqrt{5}}{12}\text{ km}$ 

Lời giải

Chọn C

Đặt  $BM = x(\text{km}) \Rightarrow MC = 7 - x(\text{km})$ ,  $(0 < x < 7)$ .Ta có: Thời gian chèo đò từ  $A$  đến  $M$  là:  $t_{AM} = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{4}(h)$ .Thời gian đi bộ đi bộ đến  $C$  là:  $t_{MC} = \frac{7-x}{6}(h)$ Thời gian từ  $A$  đến kho  $t = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{4} + \frac{7-x}{6}$ Khi đó:  $t' = \frac{x}{4\sqrt{x^2 + 25}} - \frac{1}{6}$ , cho  $t' = 0 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{5}$ Lập bảng biến thiên, ta thấy thời gian đến kho nhanh nhất khi  $x = 2\sqrt{5}(\text{km})$ .

**Câu 47. (VD)** Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí  $A$  tới điểm  $B$  về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng  $3\text{ km}$  (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến  $C$  và sau đó chạy đến  $B$ , hay có thể chèo trực tiếp đến  $B$ , hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm  $D$  giữa  $C$  và  $B$  và sau đó chạy đến  $B$ . Biết anh ấy có thể chèo thuyền  $6\text{ km/h}$ , chạy  $8\text{ km/h}$  và quãng đường  $BC = 8\text{ km}$ . Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Tìm khoảng thời gian ngắn nhất (đơn vị: giờ) để người đàn ông đến  $B$ .

A.  $\frac{3}{2}$ B.  $\frac{9}{\sqrt{7}}$ C.  $\frac{\sqrt{73}}{6}$ D.  $1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$ .

Lời giải

Đặt  $CD = x$ . Quãng đường chạy bộ  $DB = 8 - x$  và quãng đường chèo thuyền  $AD = \sqrt{9 + x^2}$ .

Khi đó, thời gian chèo thuyền là  $\frac{\sqrt{9+x^2}}{6}$  và thời gian chạy bộ là  $\frac{8-x}{8}$ .

Tổng thời gian mà người đàn ông cần có là:

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \frac{8-x}{8}, \forall x \in [0;8].$$

$$\text{Ta có: } T'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{8}.$$

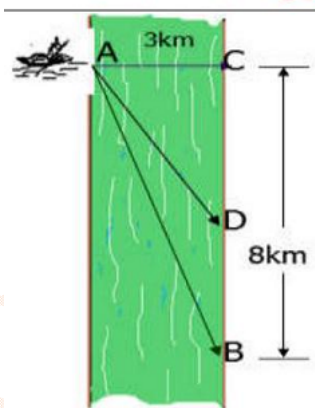
$$T'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow 4x = 3\sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow 16x^2 = 9(x^2+9) \Leftrightarrow 7x^2 = 81 \Rightarrow x = \frac{9}{\sqrt{7}}$$

$$\text{Ta có: } T(0) = \frac{3}{2}; T\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8}; T(8) = \frac{\sqrt{73}}{6}.$$

$$\text{Do đó: } \min_{[0;8]} T(x) = T\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8}.$$

Vậy thời gian ngắn nhất mà người đàn ông cần dùng là  $1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1,33(h)$  bằng cách chèo thuyền đến điểm  $D$  cách  $C$  một khoảng  $\frac{9}{\sqrt{7}}(km)$  rồi từ đó chạy bộ đến điểm  $B$ .

- Câu 48. (VD)** Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí  $A$  tới điểm  $B$  về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến  $C$  và sau đó chạy đến  $B$ , hay có thể chèo trực tiếp đến  $B$ , hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm  $D$  giữa  $C$  và  $B$  và sau đó chạy đến  $B$ . Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h, chạy 8 km/h và quãng đường  $BC = 8$  km. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông.



Gọi  $x$  (km) là độ dài quãng đường  $BD$ . Khi đó:

a)  $8-x$  (km) là độ dài quãng đường  $CD$ .

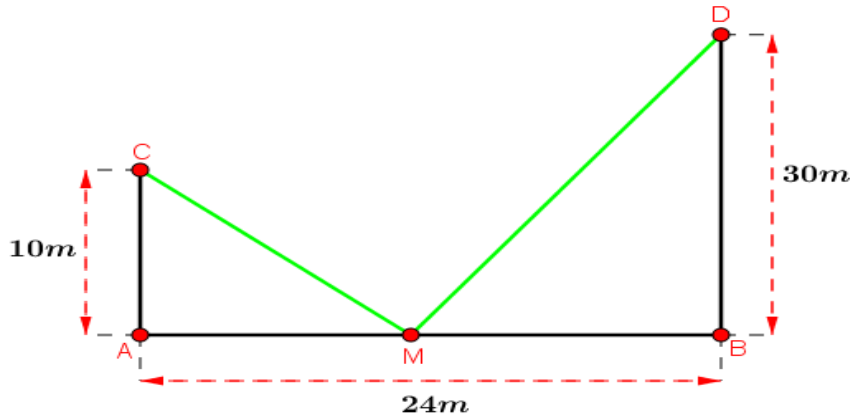
b) Thời gian chèo thuyền trên quãng đường  $AD$  là:  $\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}$  (giờ)

c) Tổng thời gian di chuyển từ  $A$  đến  $B$  là  $\frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{8-x}{8}$

d) Khoảng  $1^h20'$  là khoảng thời gian ngắn nhất để người đàn ông đến  $B$ .

- Câu 49. (VD)** Có hai chiếc cọc cao 10 m và 30 m lần lượt đặt tại hai vị trí  $A, B$ . Biết khoảng cách giữa hai cọc bằng 24 m. Người ta chọn một cái chốt ở vị trí  $M$  trên mặt đất nằm giữa hai chân cột

để giăng dây nối đến hai đỉnh  $C$  và  $D$  của cọc (như hình vẽ). Hỏi ta phải đặt chốt ở vị trí nào để tổng độ dài của sợi dây đó là ngắn nhất?

**Lời giải**

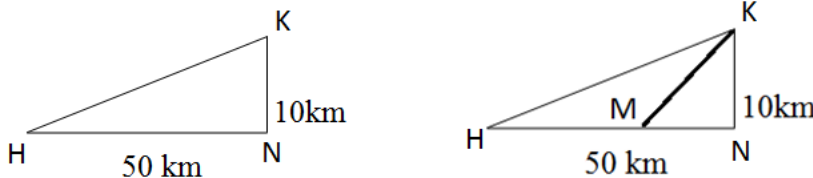
Đặt  $AM = x (0 < x < 24) \Rightarrow BM = 24 - x$ . Ta có  $CM = \sqrt{CA^2 + AM^2} = \sqrt{x^2 + 100}$

$MD = \sqrt{MB^2 + BD^2} = \sqrt{(24-x)^2 + 900}$ . Suy ra tổng độ dài sợi dây là:

$$CM + MD = \sqrt{(24-x)^2 + 900} + \sqrt{x^2 + 100} = f(x), (0 < x < 24)$$

Khảo sát hàm ta được:  $x = 6(m) \Rightarrow f(6) = 8\sqrt{34} \approx 46,6(m)$ .

- Câu 50. (VD)** Cô An đang ở khách sạn  $H$  bên bờ biển, cô cần đi du lịch đến hòn đảo  $K$ . Biết khoảng cách từ đảo  $K$  đến bờ biển là  $KN = 10\text{km}$ , khoảng cách từ khách sạn đến  $H$  đến điểm  $N$  là  $HN = 50\text{km}$  (giả thiết  $HN \perp NK$ ). Từ khách sạn  $H$ , cô An có thể đi đường thủy hoặc đi đường bộ rồi đường thủy để đến hòn đảo  $K$  (như hình vẽ). Biết rằng chi phí đi đường thủy là  $5\text{USD}/1\text{km}$ , chi phí đi đường bộ là  $3\text{USD}/1\text{km}$ . Hỏi cô An phải chi một khoản tiền nhỏ nhất là bao nhiêu để đi đến đảo  $K$ ?

**Lời giải**

Giả sử người đó đi đường bộ từ  $H$  đến  $M$ , rồi đi đường thủy từ  $M$  đến  $K$ .

Đặt  $x = MN \Rightarrow HM = 50 - x$ ,  $MK = \sqrt{x^2 + 10^2} = \sqrt{x^2 + 100}$  với  $0 \leq x \leq 50$ .

Khi đó kinh phí phải trả là:  $f(x) = 3(50 - x) + 5\sqrt{x^2 + 100}$  với  $0 \leq x \leq 50$ .

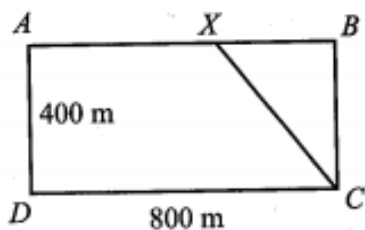
Ta có:  $f'(x) = -3 + \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 100}}$

Cho  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{15}{2} \in [0; 50]$ .

Mà  $f(0) = 200$ ,  $f(50) = 50\sqrt{26}$ ,  $f\left(\frac{15}{2}\right) = 190$  nên  $\min_{[0;50]} f(x) = f\left(\frac{15}{2}\right) = 190$

Vậy cô An phải chi khoản tiền nhỏ nhất là  $190 \text{ USD}$ .

- Câu 51. (VD)** Một vận động viên thể thao hai môn phối hợp luyện tập với một bể bơi hình chữ nhật rộng  $400 \text{ m}$ , dài  $800 \text{ m}$ .



Vận động viên chạy phối hợp với bơi như sau: Xuất phát từ điểm  $A$ , chạy đến điểm  $X$  và bơi từ điểm  $X$  đến điểm  $C$  (Hình vẽ). Hỏi nên chọn điểm  $X$  cách  $A$  gần bằng bao nhiêu mét để vận động viên đến  $C$  nhanh nhất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)? Biết rằng vận tốc chạy là 30 km/h, vận tốc bơi là 6 km/h.

**Lời giải**

**Đáp số: 718**

Đặt  $BX = x$  (km), ta có:  $AX = 0,8 - x$  (km);

$$XC = \sqrt{(0,4)^2 + x^2} = \sqrt{0,16 + x^2} \text{ (km)}.$$

$$\text{Xét hàm số: } T(x) = \frac{0,8 - x}{30} + \frac{\sqrt{0,16 + x^2}}{6} = \frac{1}{30} \left( 0,8 - x + 5\sqrt{0,16 + x^2} \right) (0 \leq x < 0,8).$$

$$\text{Ta có: } T'(x) = \frac{1}{30} \left( -1 + \frac{5x}{\sqrt{0,16 + x^2}} \right), T'(x) = 0 \Rightarrow 5x = \sqrt{0,16 + x^2}.$$

Bình phương hai vế phương trình ta được  $0,16 + x^2 = 25x^2 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{6}}{30}$ . Vì  $0 < x < 0,8$  nên

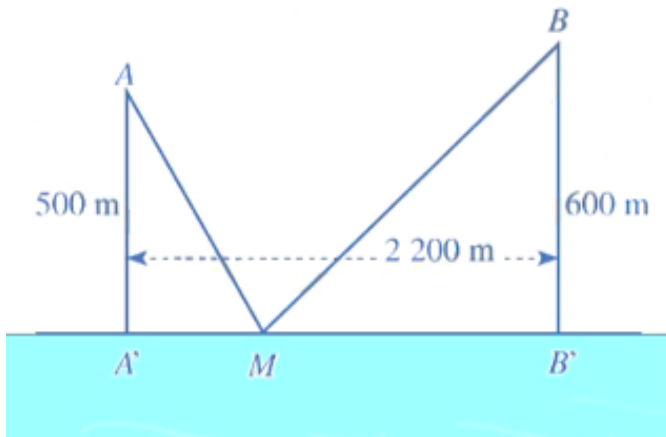
$$x = \frac{\sqrt{6}}{30}.$$

Bảng biến thiên của hàm số  $T(x)$  là:

|         |                |                                     |                       |
|---------|----------------|-------------------------------------|-----------------------|
| $x$     | 0              | $\frac{\sqrt{6}}{30}$               | 0,8                   |
| $T'(x)$ | -              | 0                                   | +                     |
| $T(x)$  | $\frac{7}{75}$ | $T\left(\frac{\sqrt{6}}{30}\right)$ | $\frac{\sqrt{5}}{15}$ |

Vậy  $T(x)$  đạt giá trị nhỏ nhất bằng  $T\left(\frac{\sqrt{6}}{30}\right)$  khi  $AX = 0,8 - \frac{\sqrt{6}}{30} \approx 0,718$  (km) = 718 (m).

**Câu 52. (VD)** Có hai xã cùng ở một bên bờ sông Lam. Người ta đo được khoảng cách từ trung tâm  $A, B$  của hai xã đó đến bờ sông lần lượt là  $AA' = 500m$ ,  $BB' = 600m$  và  $A'B' = 2200m$  (Hình vẽ). Các kĩ sư muốn xây một trạm cung cấp nước sạch nằm bên bờ sông Lam cho người dân hai xã. Để tiết kiệm chi phí, các kĩ sư cần phải chọn vị trí  $M$  của trạm cung cấp nước sạch đó trên đoạn  $A'B'$  sao cho tổng khoảng cách từ hai vị trí  $A, B$  đến vị trí  $M$  là nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách đó.



Lời giải

Đặt  $AM = x(m)$ .

Suy ra  $BM = AB' - AM = 2200 - x(m)$ .

Rõ ràng,  $x$  phải thỏa mãn điều kiện  $0 < x < 2200$ .

Áp dụng định lý Pythagore ta tính được:

$$AM = \sqrt{AA'^2 + A'M^2} = \sqrt{500^2 + x^2} (m);$$

$$BM = \sqrt{BB'^2 + B'M^2} = \sqrt{600^2 + (2200 - x)^2} (m).$$

Tổng khoảng cách từ hai vị trí  $A, B$  đến vị trí  $M$  là

$$D = AM + BM = \sqrt{500^2 + x^2} + \sqrt{600^2 + (2200 - x)^2} (m).$$

Xét hàm số  $D(x) = \sqrt{500^2 + x^2} + \sqrt{600^2 + (2200 - x)^2}$  với  $x \in (0; 2200)$ .

$$\text{Ta có } D'(x) = \frac{x}{\sqrt{500^2 + x^2}} + \frac{x - 2200}{\sqrt{600^2 + (2200 - x)^2}};$$

Trên khoảng  $(0; 2200)$ , ta thấy  $D'(x) = 0$  khi  $x = 1000$ .

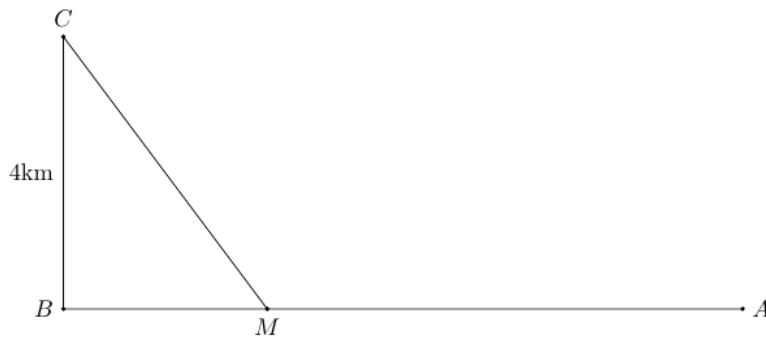
Bảng biến thiên của hàm số  $D(x)$  như sau:

| x       | 0                     | 1 000          | 2 200                 |
|---------|-----------------------|----------------|-----------------------|
| $D'(x)$ | —                     | 0              | +                     |
| $D(x)$  | $500 + 200\sqrt{130}$ | $1100\sqrt{5}$ | $600 + 100\sqrt{509}$ |

Căn cứ vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số  $D(x)$  đạt giá trị nhỏ nhất bằng  $1100\sqrt{5}$  tại  $x = 1000$ .

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách cần tìm là  $1100\sqrt{5}$  m.

**Câu 53. (VD)** Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở  $A$  đến một hòn đảo ở  $C$  như hình vẽ. Khoảng cách từ  $C$  đến  $B$  là 4 km. Bờ biển chạy thẳng từ  $A$  đến  $B$  với khoảng cách là 10 km. Tổng chi phí lắp đặt cho 1 km dây điện trên biển là 50 triệu đồng, còn trên đất liền là 30 triệu đồng. Xác định vị trí điểm  $M$  trên đoạn  $AB$  (điểm nối dây từ đất liền ra đảo) để tổng chi phí lắp đặt là nhỏ nhất.

**Lời giải**

Đặt  $MB = x$  (km,  $0 \leq x \leq 10$ )  $\Rightarrow AM = 10 - x$  (km),

Áp dụng định lý pitago trong tam giác vuông  $MBC$  ta có:  $MC = \sqrt{MB^2 + CB^2} = \sqrt{x^2 + 16}$  (km)

Chi phí nối dây điện từ  $M$  đến  $A$  là:  $30(10 - x)$

Chi phí nối dây điện từ  $M$  đến  $C$  là:  $50\sqrt{x^2 + 16}$

Khi đó, tổng chi phí nối dây điện từ  $A$  đến  $C$  là  $f(x) = 30(10 - x) + 50\sqrt{x^2 + 16}$  (triệu đồng).

Để chi phí lắp đặt đường dây điện là nhỏ nhất thì hàm số  $f(x) = 30(10 - x) + 50\sqrt{x^2 + 16}$  phải đạt giá trị nhỏ nhất.

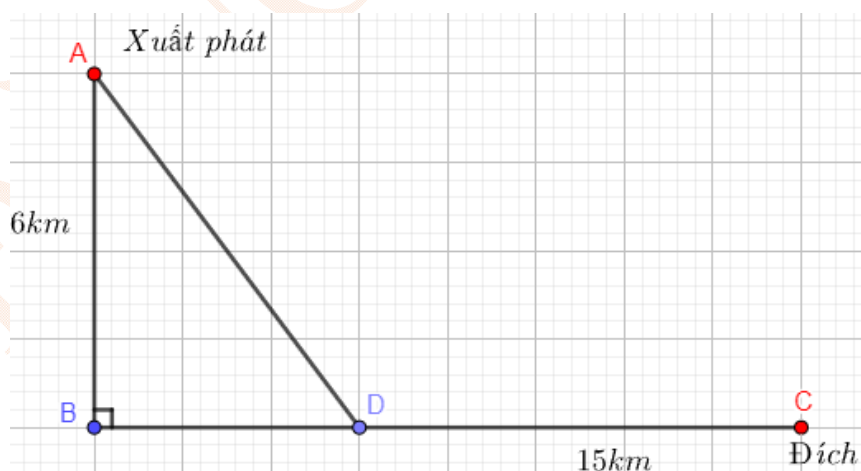
Ta có  $f'(x) = -30 + \frac{50x}{\sqrt{x^2 + 16}}$ .

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow 25x^2 = 9x^2 + 144 \Leftrightarrow x = 3 \text{ (do } 0 \leq x \leq 10\text{)}.$$

Ta có  $f(0) = 500$ ,  $f(3) = 460$ ,  $f(10) = 100\sqrt{29}$  nên chi phí nhỏ nhất là 460 triệu đồng khi  $x = 3$ .

Vậy vị trí của điểm  $M$  nằm trên đoạn  $AB$  thỏa mãn yêu cầu bài toán là: Điểm  $M$  cách  $B$  một khoảng 3 km trên đoạn  $AB$  (điểm nối dây từ đất liền ra đảo) thì tổng chi phí lắp đặt là nhỏ nhất.

**Câu 54. (VD)** Trong cuộc thi 2 môn phối hợp gồm chèo thuyền và chạy bộ. Các vận động viên sẽ chèo thuyền từ điểm xuất phát  $A$  cách bờ  $BC$  6km sau đó đến bờ tại một vị trí  $D$  bất kì rồi chạy về đích  $C$ , (xem hình minh họa). Biết rằng quãng đường trên bờ  $BC = 15\text{km}$ , vận tốc chèo thuyền của một vận động viên  $X$  là  $8\text{km/h}$  và vận tốc chạy trên bờ là  $16\text{km/h}$



Hỏi  $X$  nên chèo thuyền về bờ tại vị trí  $D$  cách đích  $C$  là bao nhiêu để tổng thời gian về đích là sớm nhất.

Quãng đường  $DC$  bằng.....

**Lời giải**

**Đáp số:**  $15 - 2\sqrt{3}$ .

Giả sử  $BD = x \Rightarrow \begin{cases} DC = 15 - x \\ AD = \sqrt{x^2 + 36} \end{cases}, (0 \leq x \leq 15).$

Tổng thời gian để vận động viên về đích là  $t = \frac{\sqrt{x^2 + 36}}{8} + \frac{15 - x}{16}$ .

Xét hàm số  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 36}}{8} + \frac{15 - x}{16}, 0 \leq x \leq 15$ , ta có  $f'(x) = \frac{x}{8\sqrt{x^2 + 36}} - \frac{1}{16}$ .

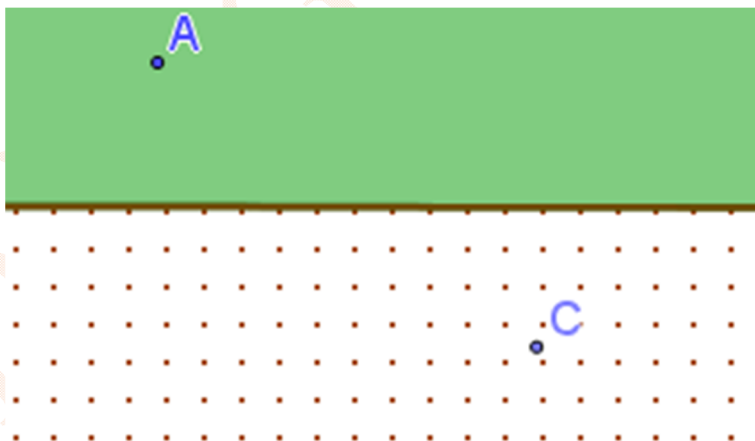
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 36} = 2x \xrightarrow{0 \leq x \leq 15} x = 2\sqrt{3}$ .

Ta có bảng biến thiên

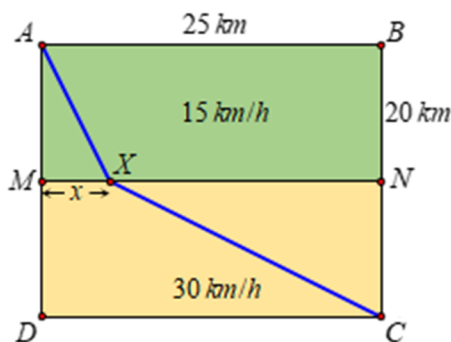
|         |                 |                |                        |
|---------|-----------------|----------------|------------------------|
| $x$     | 0               | $2\sqrt{3}$    | 15                     |
| $f'(x)$ | –               | 0              | +                      |
| $f(x)$  | $\frac{27}{16}$ | $f(2\sqrt{3})$ | $\frac{3\sqrt{29}}{8}$ |

Vậy vận động viên nên vào bờ tại vị trí  $D$  cách đích  $C$  một khoảng là  $15 - 2\sqrt{3} \approx 11,54 \text{ km}$

**Câu 55. (VD)** Một người cưỡi ngựa xuất phát từ  $A$  đi đến  $C$ . Điểm  $A$  nằm trong vùng đất ướt nên vận tốc của ngựa khi đi trong vùng này là  $15 \text{ km/h}$ , Điểm  $C$  nằm trong vùng đất khô hơn nên vận tốc của ngựa khi đi trong vùng này là  $30 \text{ km/h}$ . Hai phần đất này giáp nhau bởi một đường thẳng  $d$  đi qua trung điểm của  $AC$  và khoảng cách từ  $A$  và  $C$  đến đường này đều bằng  $10 \text{ km}$ . Biết  $AC = 5\sqrt{41} \text{ km}$ , thời gian ít nhất để đi từ  $A$  đến  $C$  là mấy giờ (làm tròn 2 chữ số sau dấu phẩy)?



**Lời giải**



Dựng hình chữ nhật  $ABCD$  với  $AB, CD$  song song với  $d$  khi đó hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 25 \text{ km}$ ,  $BC = 20 \text{ km}$ . Gọi  $M, N$  là trung điểm của  $AD, CB$ . Để mất ít thời gian thì phải đi theo các đoạn thẳng  $AX$  và  $XC$  với  $X$  thuộc đoạn  $MN$

Đặt  $MX = x (\text{km})$  với  $0 \leq x \leq 25$

Quãng đường  $AX = \sqrt{x^2 + 10^2}$

$\Rightarrow$  thời gian tương ứng  $\frac{\sqrt{x^2 + 100}}{15} (\text{h})$

Quãng đường  $CX = \sqrt{(25-x)^2 + 10^2}$

thời gian tương ứng  $\frac{\sqrt{x^2 - 50x + 725}}{30} (\text{h})$

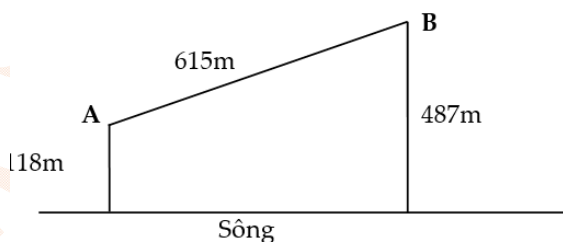
Tổng thời gian  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 100}}{15} + \frac{\sqrt{x^2 - 50x + 725}}{30}$  với  $x \in [0; 25]$ , tìm giá trị nhỏ nhất  $f(x)$

$f'(x) = \frac{x}{15\sqrt{x^2 + 100}} + \frac{x-25}{30\sqrt{x^2 - 50x + 725}}$ ,  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$

Tính các giá trị  $f(0) = \frac{4 + \sqrt{29}}{6} \approx 1,56$ ,  $f(25) = \frac{1 + \sqrt{29}}{3} \approx 2,13$ ,  $f(5) = \frac{2\sqrt{5}}{3} \approx 1,49$

Vậy hàm số đạt GTNN bằng  $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ .

**Câu 56. (VD)** Cho hai vị trí A, B cách nhau 615m, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ.



Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là 118m và 487m. Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước và mang về B. Đoạn đường ngắn nhất mà người đó phải đi là:

A. 569,5m

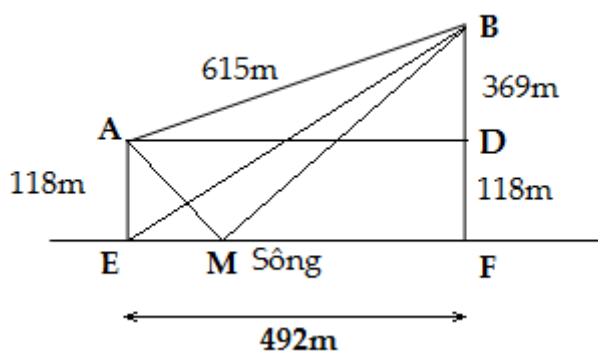
**B. 671,4m**

C. 779,8m

D. 741,2m

Lời giải

Chọn B



Ta giả sử người đó đi từ A đến M để lấy nước và đi từ M về B để dễ dàng tính được  $BD = 369$ ,  $EF = 492$ .

(B)

Ta đặt  $EM = x$ , khi đó ta được:

$$MF = 492 - x, AM = \sqrt{x^2 + 118^2}, BM = \sqrt{(492 - x)^2 + 369^2}.$$

Như vậy ta có hàm số  $f(x)$  được xác định bằng tổng quãng đường AM và MB:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 118^2} + \sqrt{(492 - x)^2 + 369^2} \text{ với } x \in [0; 492]$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của  $f(x)$  để có được quãng đường ngắn nhất và từ đó xác định được vị trí điểm M.

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} - \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 369^2}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} - \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 369^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} = \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 369^2}}$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{(492 - x)^2 + 369^2} = (492 - x)\sqrt{x^2 + 118^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2[(492 - x)^2 + 369^2] = (492 - x)^2(x^2 + 118^2) \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (487x)^2 = (58056 - 118x)^2 \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases}$$

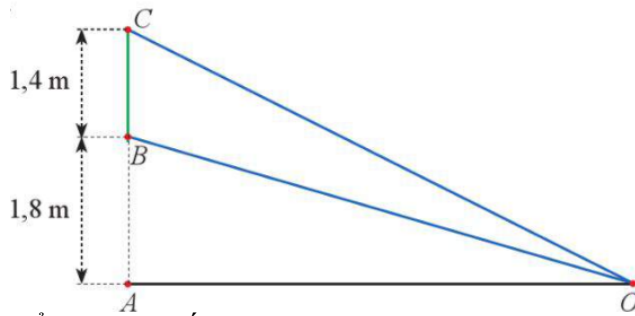
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{58056}{605} \text{ hay } x = -\frac{58056}{369} \Leftrightarrow x = \frac{58056}{605} \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases}$$

Hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0; 492]$ .

So sánh các giá trị của  $f(0)$ ,  $f\left(\frac{58056}{605}\right)$ ,  $f(492)$  ta có giá trị nhỏ nhất là  $f\left(\frac{58056}{605}\right) \approx 779,8m$

Khi đó

**Câu 57. (VD)** Một màn ảnh hình chữ nhật cao 1,4m được đặt ở độ cao 1,8m so với tầm mắt (tính đầu mép dưới của màn hình như hình vẽ).



Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đứng cách màn ảnh sao cho góc nhìn lớn nhất. Hãy xác định vị trí đó.

**Lời giải**

**Đáp số:** 2,4.

Đặt  $OA = x$  (m) với  $x > 0$

$$\text{Ta có: } \tan \widehat{BOC} = \tan(\widehat{AOC} - \widehat{AOB}) = \frac{\tan \widehat{AOC} - \tan \widehat{AOB}}{1 + \tan \widehat{AOC} \cdot \tan \widehat{AOB}}$$

$$= \frac{\frac{AC}{OA} - \frac{AB}{OA}}{1 + \frac{AC \cdot AB}{OA^2}} = \frac{\frac{1,4}{x} - \frac{1,8}{x}}{1 + \frac{3,2 \cdot 1,8}{x^2}} = \frac{1,4x}{x^2 + 5,76}$$

Để góc quan sát  $BOC$  lớn nhất thì  $\tan \widehat{BOC}$  lớn nhất.

Xét hàm số  $f(x) = \frac{1,4x}{x^2 + 5,76}$  với  $x > 0$ .

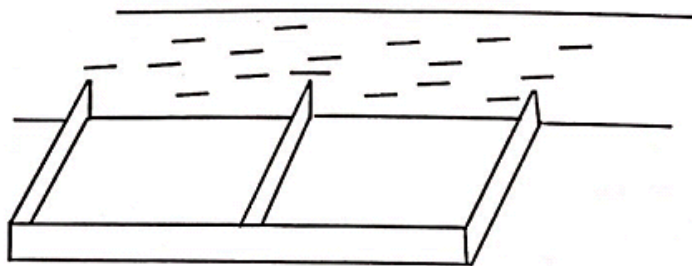
Ta có hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $(0; +\infty)$  và  $f'(x) = \frac{-1,4x^2 + 1,4 \cdot 5,76}{(x^2 + 5,76)^2}$ ,  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2,4$

Ta có bảng biến thiên

| x       | 0 | 2,4              | $+\infty$ |
|---------|---|------------------|-----------|
| $f'(x)$ | + | 0                | -         |
| $f(x)$  |   | $\frac{84}{193}$ | 0         |

Vậy vị trí đứng cho góc nhìn lớn nhất là cách màn ảnh 2,4m.

**Câu 58. (VD)** Một người nông dân có 30.000.000 đồng muốn dùng hết số tiền để làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để chia khu đất thành hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 120.000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 100.000 đồng một mét. Tìm diện tích lớn nhất của đất rào thu được (đơn vị  $m^2$ )?

**Lời giải**

Đáp số: 6250.

Gọi  $x$  (m) là chiều dài một trong ba mặt hàng rào song song với nhau của hình chữ E ( $x > 0$ ).

Gọi  $y$  (m) là chiều dài mặt hàng rào của hình chữ E song song với bờ sông ( $y > 0$ ).

Số tiền để làm hàng rào là:  $x \cdot 3 \cdot 100000 + y \cdot 120000 = 30000000 \Leftrightarrow y = \frac{500 - 5x}{2}$ .

Diện tích đất rào:  $S = x \cdot y = x \cdot \left( \frac{500 - 5x}{2} \right) = 250x - \frac{5}{2}x^2$ .

Ta có:  $S' = 250 - 5x$ .

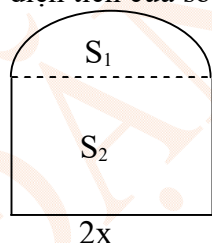
$S' = 0 \Leftrightarrow 250 - 5x \Leftrightarrow x = 50$ .

Bảng biến thiên:

|      |   |      |           |
|------|---|------|-----------|
| $x$  | 0 | 50   | $+\infty$ |
| $S'$ | + | 0    | -         |
| $S$  | 0 | 6250 | $-\infty$ |

Vậy  $\max_{(0; +\infty)} S = 6250$  ( $m^2$ ) khi  $x = 50$  (m).

- Câu 59. (VD)** Cần phải làm cái cửa sổ mà, phía trên là hình bán nguyệt, phía dưới là hình chữ nhật, có chu vi là  $a$  (m) ( $a$  chính là chu vi hình bán nguyệt cộng với chu vi hình chữ nhật trừ đi độ dài cạnh hình chữ nhật là dây cung của hình bán nguyệt). Hãy xác định các kích thước của nó để diện tích cửa sổ là lớn nhất?



- A.** chiều rộng bằng  $\frac{2a}{4 + \pi}$ , chiều cao bằng  $\frac{a}{4 + \pi}$   
**B.** chiều rộng bằng  $\frac{a}{4 + \pi}$ , chiều cao bằng  $\frac{2a}{4 + \pi}$   
**C.** chiều rộng bằng  $a(4 + \pi)$ , chiều cao bằng  $2a(4 + \pi)$   
**D.** Đáp án khác

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi  $x$  là bán kính của hình bán nguyệt.

Ta có chu vi của hình bán nguyệt là  $\pi x$ , tổng ba cạnh của hình chữ nhật là  $a - \pi x$ .

Diện tích cửa sổ là:

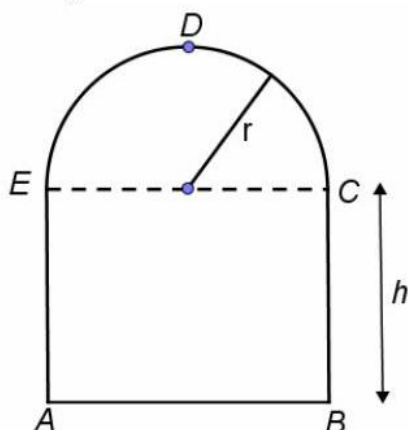
$$S = S_1 + S_2 = \frac{\pi x^2}{2} + 2x \frac{a - \pi x - 2x}{2} = ax - \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)x^2 = \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)x \left(\frac{a}{\frac{\pi}{2} + 2} - x\right).$$

Để thấy  $S$  lớn nhất khi  $x = \frac{a}{\frac{\pi}{2} + 2} - x$  hay  $x = \frac{a}{4 + \pi}$ . (Có thể dùng đạo hàm hoặc đỉnh

Parabol)

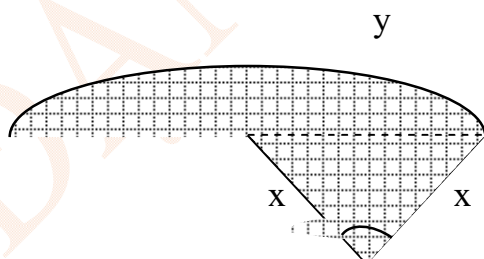
Vậy để  $S_{\max}$  thì các kích thước của nó là: chiều cao bằng  $\frac{a}{4 + \pi}$ ; chiều rộng bằng  $\frac{2a}{4 + \pi}$

**Câu 60. (VD)** Bác thợ hàn dùng một thanh kim loại dài 250 cm để uốn thành khung cửa sổ có dạng như hình vẽ. Gọi  $r$  là bán kính của nửa đường tròn,



- a) Diện tích của nửa hình tròn là  $S_1 = \frac{1}{2}\pi r^2$
- b) Diện tích của hình chữ nhật là  $S_2 = 250r - \pi r^2 - 2r^2$
- c) Khi  $r = 10$  thì giá trị diện tích của khung cửa sổ nằm trong khoảng  $(2000; 2140)$
- d) Biết  $r = r_0$  thì diện tích tạo thành đạt giá trị lớn nhất khi đó  $r_0 \in (35; 36)$

**Câu 61. (VD)** Người ta muốn làm một cánh điều hình quạt sao cho với chu vi cho trước là  $a$ , sao cho diện tích của hình quạt là cực đại. Dạng của quạt này phải như thế nào?



**A.**  $x = \frac{a}{4}; y = \frac{a}{2}$

**B.**  $x = \frac{a}{3}; y = \frac{a}{3}$

**C.**  $x = \frac{a}{6}; y = \frac{2a}{3}$

**D.** Đáp án khác

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi  $x$  là bán kính hình quạt,  $y$  là độ dài cung tròn.

Ta có chu vi cánh điều là  $a = 2x + y$ .

Ta cần tìm mối liên hệ giữa độ dài cung tròn  $y$  và bán kính  $x$  sao cho diện tích quạt lớn nhất.

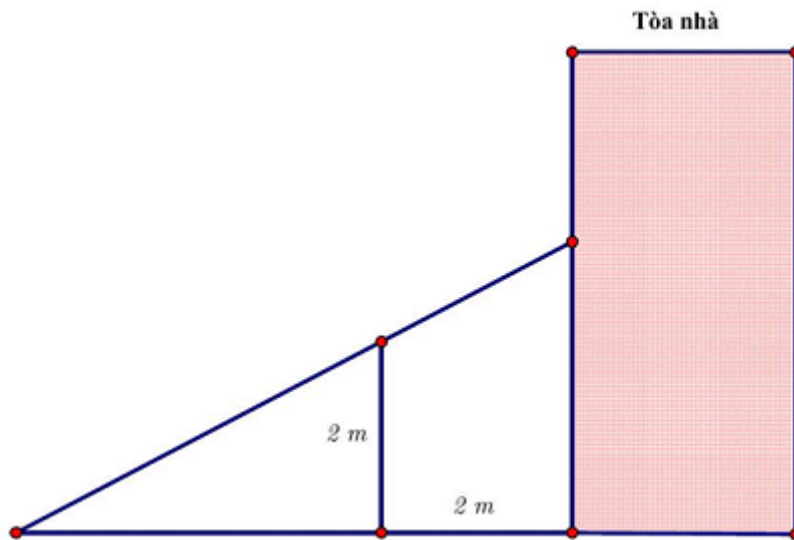
Dựa vào công thức tính diện tích hình quạt là  $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$  và độ dài cung tròn  $\ell = \frac{2\pi R \alpha}{360}$ , ta có diện tích hình quạt là:  $S = \frac{\ell R}{2}$ .

Vận dụng trong bài toán này diện tích cánh điều là:  $S = \frac{xy}{2} = \frac{x(a-2x)}{2} = \frac{1}{4}2x(a-2x)$ .

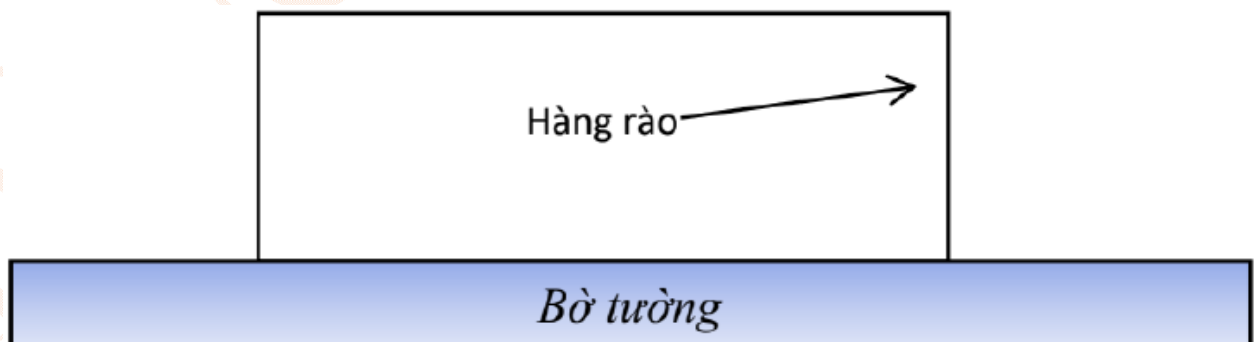
Dễ thấy  $S$  cực đại  $\Leftrightarrow 2x = a - 2x \Leftrightarrow x = \frac{a}{4} \Rightarrow y = \frac{a}{2}$ .

Như vậy với chu vi cho trước, diện tích của hình quạt cực đại khi bán kính của nó bằng nửa độ dài cung tròn.

- Câu 62. (VD)** Một bức tường cao 2 m nằm song song với tòa nhà và cách tòa nhà 2 m. Người ta muốn chế tạo một chiếc thang bắc từ mặt đất bên ngoài bức tường, gác qua bức tường và chạm vào tòa nhà (xem hình vẽ). Hỏi chiều dài tối thiểu của thang bằng bao nhiêu mét?

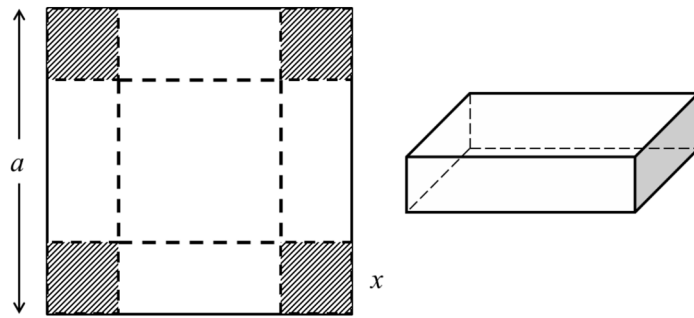


- Câu 63. (VD)** Bác nông dân muốn làm hàng rào trồng rau hình chữ nhật có chiều dài song song với hàng tường gạch. Bác chỉ làm ba mặt hàng rào bởi vì mặt thứ tư bác tận dụng luôn bờ tường. Bác dự tính sẽ dùng 200 m lưới để làm nên toàn bộ hàng rào đó. Diện tích đất trồng rau lớn nhất bác có thể rào nên là:



**Loại 2: Thiết lập hàm liên quan đến hình học không gian.**

- Câu 64. (VD)** Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh  $a$ . Người ta cắt ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau, rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp.



Tìm cạnh của hình vuông bị cắt sao cho thể tích của khối hộp là lớn nhất?

A.  $\frac{5a}{6}$ .

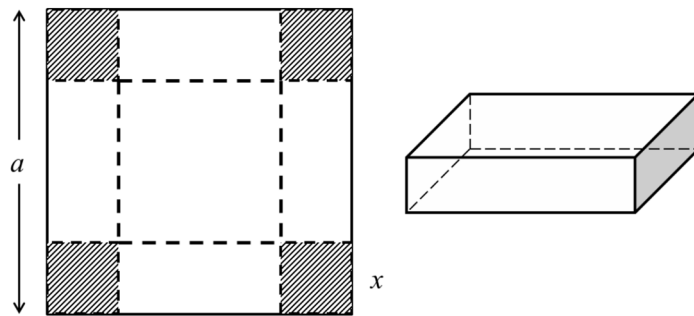
**B.  $\frac{a}{6}$ .**

C.  $\frac{a}{12}$ .

D.  $\frac{a}{9}$ .

Lời giải

Chọn B



Gọi  $x$  là độ dài cạnh của hình vuông bị cắt  $\left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$ .

Thể tích của khối hộp là:

$$V(x) = x(a - 2x)^2 \quad \left(0 < x < \frac{a}{2}\right).$$

$$\Rightarrow V'(x) = (a - 2x)^2 + x \cdot 2(a - 2x) \cdot (-2) = (a - 2x)(a - 6x);$$

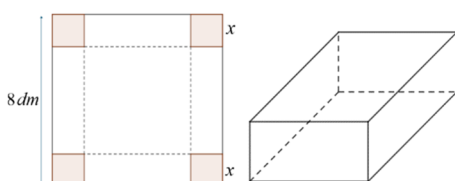
$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{6} \quad \left(0 < x < \frac{a}{2}\right).$$

Bảng biến thiên

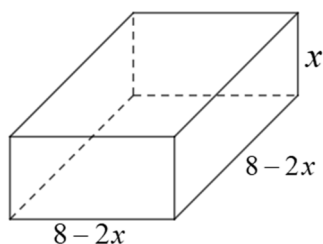
|         |   |                            |               |   |
|---------|---|----------------------------|---------------|---|
| $x$     | 0 | $\frac{a}{6}$              | $\frac{a}{2}$ |   |
| $V'(x)$ |   | +                          | 0             | - |
| $V(x)$  | 0 | $\nearrow \frac{2a^3}{27}$ | $\searrow$    | 0 |

Vậy trong khoảng  $\left(0; \frac{a}{2}\right)$  có 1 điểm cực đại duy nhất là  $x = \frac{a}{6}$  tại đó  $V(x) = \frac{2a^3}{27}$ .

**Câu 65. (VD)** Cho một tấm nhôm hình vuông có cạnh 8 dm. Anh Long cắt ở bốn góc bốn hình vuông có độ dài bằng  $x$  (dm) rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ để được một cái hộp có dạng khối hộp chữ nhật. Hỏi thể tích lớn nhất của cái hộp là bao nhiêu?



## Lời giải



**Đáp số:**  $\frac{1024}{27} dm^3$

Sau khi gập lại, ta được khối hộp với các kích thước như hình vẽ. Chiều cao khối hộp là  $x$  dm.

Thể tích  $V = x(8-2x)^2$  với điều kiện  $8-2x > 0 \Leftrightarrow x < 4$

Xét hàm số  $V(x) = x(8-2x)^2$  trên khoảng  $(0; 4)$

$$V'(x) = (x)'(8-2x)^2 + x[(8-2x)^2]' = (8-2x)^2 + x[2 \cdot (-2)(8-2x)] = (8-2x)(8-6x)$$

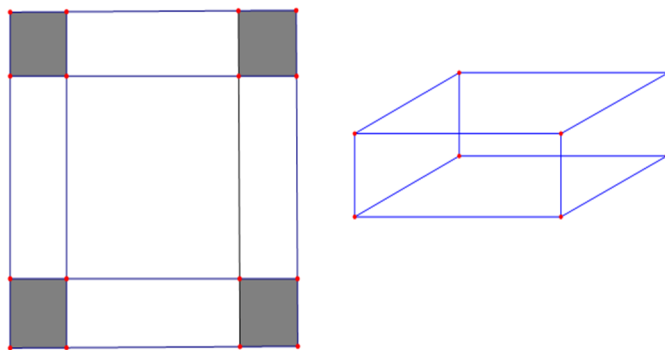
$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow (8-2x)(8-6x) \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Ta có BBT của hàm số  $V(x)$

|         |   |                   |   |
|---------|---|-------------------|---|
| $x$     | 0 | $\frac{4}{3}$     | 4 |
| $V'(x)$ | + | 0                 | - |
| $V(x)$  | 0 | $\frac{1024}{27}$ | 0 |

Từ BBT, ta có thể tích lớn nhất của hộp là  $\frac{1024}{27} dm^3$ .

**Câu 66. (VD)** Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh  $40cm$ . Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng  $x(cm)$ , rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm  $x$  để hộp nhận được có thể tích lớn nhất?

**Lời giải**

Ta có:  $h = x$  (cm) là chiều cao của hình hộp.

Vì tấm nhôm được gấp lại tạo thành hình hộp nên cạnh đáy của hình hộp là:  $40 - 2x$  (cm).

Vậy diện tích đáy hình hộp  $S = (40 - 2x)^2$  (cm<sup>2</sup>).

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x > 0 \\ 40 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 20 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 20).$$

Thể tích của hình hộp là:  $V = S.h = x.(40 - 2x)^2$ .

Xét hàm số:  $y = x.(40 - 2x)^2$  trên khoảng  $(0; 20)$

Ta có:  $y' = (40 - 2x)^2 - 4x(40 - 2x) = (40 - 2x)(40 - 6x)$  ;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 (L) \\ x = \frac{20}{3} (N) \end{cases}$$

|      |   |                     |    |
|------|---|---------------------|----|
| $x$  | 0 | $\frac{20}{3}$      | 20 |
| $y'$ |   | +                   | -  |
| $y$  |   | $\frac{128000}{27}$ |    |
|      | 0 |                     | 0  |

Vậy  $x = \frac{20}{3}$  thì thể tích khối hộp là lớn nhất.

**Câu 67. (VD)** Có một tấm nhôm hình vuông cạnh 12cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng  $x$ (cm) rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm  $x$  để hình hộp nhận được có thể tích lớn nhất.

A.  $x = 6$

B.  $x = 3$

C.  $x = 2$

D.  $x = 4$

**Lời giải**

**Chọn C**

Độ dài cạnh đáy của cái hộp:  $12 - 2x$ .

Diện tích đáy của cái hộp:  $(12 - 2x)^2$ .

Thể tích cái hộp là:  $V = (12 - 2x)^2 . x = 4x^3 - 48x^2 + 144x$  với  $x \in (0; 6)$

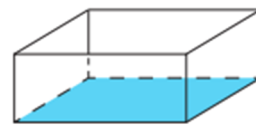
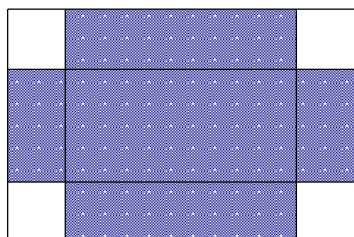
Ta có:  $V'(x) = 12x^2 - 96x + 144$ .

Cho  $V'(x) = 0$ , giải và chọn nghiệm  $x = 2$ .

Lập bảng biến thiên ta được  $V_{\max} = 128$  khi  $x = 2$ .

**Câu 68. (VD)** Trong một trò chơi, mỗi đội chơi được phát một tấm bìa hình chữ nhật kích thước 21 cm, 29,5 cm. Nhiệm vụ của mỗi đội là cắt ở bốn góc của tấm bìa này bốn hình vuông bằng nhau, rồi

gập tấm bìa lại và dán keo để được một cái hộp không nắp có dạng hình hộp chữ nhật như hình vẽ.



Đội nào thiết kế được chiếc hộp có thể tích lớn nhất sẽ dành chiến thắng. Hãy xác định cạnh của hình vuông bị cắt để thu được hộp có thể tích lớn nhất. (Coi mép dán không đáng kể, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

### Lời giải

Đáp số: 4,03 cm.

Gọi cạnh của hình vuông bị cắt ở bốn góc là:  $x$ .

Điều kiện:  $0 < 2x < 21 \Leftrightarrow 0 < x < 10,5$ , đơn vị cm.

Ta có kích thước của khối hộp chữ nhật là:  $x, 21-2x; 29, 5-2x$ .

Thể tích của khối hộp là:  $V = (21-2x) \cdot (29,5-2x) \cdot x = 619,5x - 101x^2 + 4x^3 = f(x)$ .

Thể tích khối hộp lớn nhất khi hàm số  $f(x)$  đạt giá trị lớn nhất.

$$f'(x) = 12x^2 - 202x + 619,5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 \approx 12,80 \\ x_1 \approx 4,03 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

|         |           |          |      |          |           |
|---------|-----------|----------|------|----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $x_1$    | 10,5 | $x_2$    | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         | 0        | -    | 0        | +         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $f(x_1)$ |      | $f(x_2)$ | $+\infty$ |

Suy ra  $\max_{(0;10,5)} f(x) = f(x_1)$ .

Vậy cạnh của hình vuông xấp xỉ 4,03 cm.

**Câu 69. (VD)** Người ta muốn xây một cái bể hình hộp đứng có thể tích  $V = 18 \text{ (m}^3\text{)}$ , biết đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng và bể không có nắp. Hỏi cần xây bể có chiều cao  $h$  bằng bao nhiêu mét để nguyên vật liệu xây dựng là ít nhất?

### Lời giải

Đáp số: 1,5.

Gọi  $x$  ( $x > 0$ ) là chiều rộng hình chữ nhật đáy bể, suy ra chiều dài hình chữ nhật đáy bể là  $3x$ .

$$V = h \cdot x \cdot 3x = h \cdot 3x^2 = 18 \Rightarrow h = \frac{18}{3x^2} = \frac{6}{x^2}.$$

Gọi  $P$  là diện tích xung quanh cộng với diện tích một đáy bể của hình hộp chữ nhật.

Nguyên vật liệu ít nhất khi  $P$  nhỏ nhất.

$$P = 2hx + 2 \cdot h \cdot 3x + 3x^2 = 2 \cdot \frac{6}{x^2} \cdot x + 2 \cdot \frac{6}{x^2} \cdot 3x + 3x^2 = \frac{48}{x} + 3x^2.$$

Đặt  $f(x) = \frac{48}{x} + 3x^2, (x > 0)$ .

Ta có hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $(0; +\infty)$  và  $f'(x) = \frac{-48}{x^2} + 6x$ ,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-48}{x^2} + 6x = 0 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2.$$

Bảng biến thiên:

|         |   |   |           |
|---------|---|---|-----------|
| $x$     | 0 | 2 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | - | 0 | +         |
| $f(x)$  |   |   |           |

Suy ra vật liệu ít nhất khi  $h = \frac{6}{x^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}(m)$ .

**Câu 70. (VD)** Người ta muốn làm một cái hộp hình chữ nhật không có nắp có chiều dài gấp đôi chiều rộng và có thể tích  $100\text{ cm}^3$ . Giả sử giá tiền vật liệu làm đáy hộp là  $10000\text{ VNĐ}/m^2$  và giá tiền vật liệu làm mặt bên là  $5000\text{ VNĐ}/m^2$ . Gọi  $x$  (cm) là chiều rộng,  $y$ (cm) chiều cao của hộp và  $T$  là tổng tiền chi phí để làm hộp. Xác định tính **đúng/sai** của các khẳng định sau:

- a) Thể tích khối hộp đã cho là:  $V = 2x^2y$  (cm<sup>3</sup>)  
b) Giá tiền vật liệu làm đáy hộp là  $20000x^2$  (VNĐ)  
c) Tổng tiền chi phí làm hộp là  $T = 2x^2 + \frac{150}{x}$  (VNĐ).  
d) Để chi phí làm hộp nhỏ nhất thì chiều cao của hộp là 4,47 (cm)  
(Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

## Lời giải

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| a) | b) | c) | d) |
| Đ  | S  | Đ  | S  |

a) Ta có khối hộp có chiều rộng là  $x$  (cm), chiều dài là  $2x$  (cm) và chiều cao là  $y$ (cm). Khi đó thể tích khối hộp  $V = 2x.x.y = 2x^2y$  (cm<sup>3</sup>). Vậy (a) đúng.

**(b)** Diện tích đáy hộp  $S_1 = x.2x = 2x^2$  (cm<sup>2</sup>) =  $2x^2 \cdot 10^{-4}$  (m<sup>2</sup>) suy ra chi phí để làm đáy hộp là

$$T_1 = 2x^2 \cdot 10^{-4} \cdot 10000 = 2x^2 \text{ (VNĐ)}. \text{ Vậy (b) sai}$$

**(c)** Ta có diện tích xung quanh là  $S_{xa} = 2(xy + 2xy) = 6xy \text{ (cm}^2\text{)} = 6xy \cdot 10^{-4} \text{ (m}^2\text{)}$ .

$\Rightarrow$  chi phí T để làm hộp là  $T = 10000.(S_1) + 5000(S_{xa}) = 2x^2 + 3xy$

+) Theo giả thiết  $V = 100 \Leftrightarrow 2x^2y = 100 \Leftrightarrow y = \frac{50}{x^2}$ . Suy ra  $T = 2x^2 + \frac{150}{x}$ . Vậy (c) đúng.

**(d)** Xét hàm số  $T = 2x^2 + \frac{150}{x}$ . Ta có  $T' = 4x - \frac{150}{x^2}$

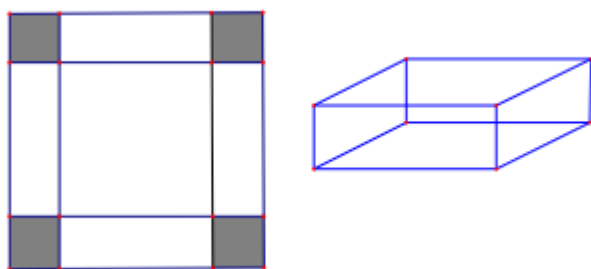
$$T' = 0 \Leftrightarrow 4x - \frac{150}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{75}{2}}. \text{ Ta có bảng biến thiên (với } x_0 = \sqrt[3]{\frac{75}{2}} \text{)}$$

|      |     |       |           |
|------|-----|-------|-----------|
| $x$  | $0$ | $x_0$ | $+\infty$ |
| $T'$ | $-$ | $0$   | $+$       |

Dựa vào bảng biến thiên ta có chi phí làm hộp nhỏ nhất đạt được tại  $x_0 = \sqrt[3]{\frac{75}{2}}$ . Khi đó chiều

cao của hộp là  $y = 50\sqrt[3]{\left(\frac{2}{75}\right)^2} \approx 4,46$  (cm). Vậy (d) sai

- Câu 71.** (TH) Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh  $12\text{cm}$ . Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng  $x$ , rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm  $x$  để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



### Lời giải

Ta có  $h = x$  (cm) là đường cao hình hộp.

Vì tấm nhôm được gấp lại tạo thành hình hộp nên cạnh đáy của hình hộp là:  $12 - 2x$  (cm).

Vậy diện tích đáy của hình hộp là  $S = (12 - 2x)^2$  (cm<sup>2</sup>) với  $0 < x < 6$ .

Thể tích của hình hộp là:  $V = S.h = x(12 - 2x)^2$ .

Xét hàm số  $y = x(12 - 2x)^2$  khi  $x \in (0; 6)$ .

Ta có  $y' = (12 - 2x)^2 - 4x(12 - 2x) = (12 - 2x)(12 - 6x)$ .

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 6(L) \end{cases}$$

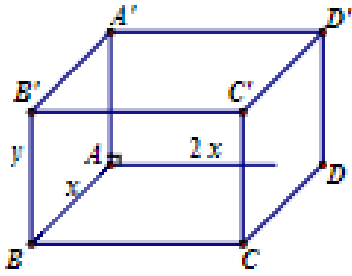
Ta có bảng biến thiên:

|      |   |   |   |   |  |
|------|---|---|---|---|--|
| $x$  | 0 | 2 | 6 |   |  |
| $y'$ |   | + | 0 | - |  |
| $y$  |   |   |   |   |  |

Vậy  $x = 2$  thì thể tích hộp đạt giá trị lớn nhất.

- Câu 72.** (TH) Ông A dự định sử dụng hết  $5\text{m}^2$  kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng. Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

### Lời giải



Gọi  $x$  và  $y$  lần lượt là chiều rộng và chiều cao của bể cá.

Ta có thể tích của bể cá là  $V = 2x^2y$ .

Theo đề bài ta có  $2xy + 2.2xy + 2x^2 = 5 \Leftrightarrow 6xy + 2x^2 = 5 \Leftrightarrow y = \frac{5-2x^2}{6x}$

$$\Rightarrow V = 2x^2 \cdot \frac{5-2x^2}{6x} = \frac{5x-2x^3}{3} \Rightarrow V' = \frac{5-6x^2}{3} \Rightarrow V' = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{5}{6}}.$$

Bảng biến thiên

| $x$  | 0 | $\sqrt{\frac{5}{6}}$    | $\sqrt{\frac{5}{2}}$ |
|------|---|-------------------------|----------------------|
| $V'$ |   | +                       | 0                    |
| $V$  | 0 | $\frac{5\sqrt{30}}{27}$ | 0                    |

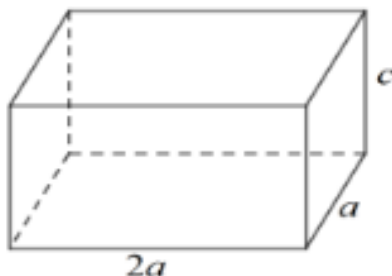
Vậy thể tích lớn nhất của bể cá là  $\frac{5\sqrt{30}}{27} \approx 1,01 m^3$

**Câu 73. (VD)** Ông Khoa muốn xây một bể cá chứa nước dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích  $288 m^3$ . Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê công nhân xây bể là  $500000$  đồng/ $m^2$ . Nếu ông Khoa biết xác định các kích thước một cách hợp lý thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi ông Khoa trả chi phí thấp nhất để xây dựng bể cá đó là bao nhiêu?

#### Lời giải

Theo bài ra ta có chi phí thuê nhân công thấp nhất thì bể phải xây dựng có tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy nhỏ nhất.

Gọi ba kích thước của bể là  $a, 2a, c$  với  $(a, c > 0)$ .



Diện tích các mặt cần xây là  $S = 2a^2 + 4ac + 2ac = 2a^2 + 6ac$ .

Thể tích bể là  $V = a.2a.c = 2a^2c = 288 \Rightarrow c = \frac{144}{a^2}$

$$\text{Khi đó } S = 2a^2 + 6a \cdot \frac{144}{a^2} = 2a^2 + \frac{864}{a} = 2a^2 + \frac{432}{a} + \frac{432}{a} \geq 3\sqrt{2a^2 \cdot \frac{432}{a} \cdot \frac{432}{a}} = 216.$$

Vậy chi phí thấp nhất là  $216.500000 = 108$  triệu đồng

**Câu 74. (VD)** Một sợi dây có chiều dài 28 m là được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện của hình vuông và hình tròn là tối thiểu?

A. 14.                      B.  $\frac{196}{4+\pi}$ .                      C.  $\frac{112}{4+\pi}$ .                      D.  $\frac{28\pi}{4+\pi}$

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi  $l$  ( $0 < l < 28$ ) là chiều dài đoạn dây làm thành hình vuông. Khi đó đoạn dây làm thành hình tròn có chiều dài là  $28 - l$ .

Cạnh hình vuông là  $\frac{l}{4}$ , bán kính hình tròn là  $\frac{1}{2\pi}(28 - l)$ .

Tổng diện tích  $S(l) = \frac{l^2}{16} + \frac{1}{4\pi}(28 - l)^2$ , suy ra  $S'(l) = \frac{1}{8} - \frac{1}{2\pi}(28 - l)$ .

Cho  $S'(l) = 0$ , ta được  $l = \frac{112}{4 + \pi}$ , suy ra chiều dài đoạn dây còn lại là  $\frac{28\pi}{4 + \pi}$ .

Kiểm tra lại bằng đạo hàm cấp 2,  $S''\left(\frac{112}{4 + \pi}\right) > 0$

Vậy  $S$  đạt giá trị nhỏ nhất bằng  $\frac{196}{4 + \pi}$  khi  $x = \frac{112}{4 + \pi}$ .

**Câu 75. (VD)** Một Bác nông dân cần xây dựng một hố ga không có nắp dạng hình hộp chữ nhật có thể tích  $3200\text{cm}^3$ , tỉ số giữa chiều cao của hố và chiều rộng của đáy bằng 2. Hãy xác định diện tích của đáy hố ga để khi xây tiết kiệm nguyên vật liệu nhất?

A.  $1200\text{cm}^2$                       B.  $160\text{cm}^2$                       C.  $1600\text{cm}^2$                       D.  $120\text{cm}^2$

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi  $x, y$  ( $x, y > 0$ ) lần lượt là chiều rộng, chiều dài của đáy hố ga.

Gọi  $h$  là chiều cao của hố ga ( $h > 0$ ). Ta có  $\frac{h}{x} = 2 \Rightarrow h = 2x$

suy ra thể tích của hố ga là:  $V = xyh = 3200 \Rightarrow y = \frac{3200}{xh} = \frac{1600}{x^2}$

Diện tích toàn phần của hố ga là:

$$S = 2xh + 2yh + xy = 4x^2 + \frac{6400}{x} + \frac{1600}{x} = 4x^2 + \frac{8000}{x} = f(x)$$

Khảo sát hàm số  $y = f(x)$ , ( $x > 0$ ) suy ra diện tích toàn phần của hố ga nhỏ nhất bằng  $1200\text{cm}^2$  khi

$$x = 10\text{ cm} \Rightarrow y = 16\text{ cm}$$

Suy ra diện tích đáy của hố ga là  $10.16 = 160\text{cm}^2$

**Câu 76. (VD)** Người ta phải cưa một thân cây hình trụ có đường kính 1m, chiều dài 8m để được một cây xà hình khối chữ nhật. Hỏi thể tích cực đại của khối gỗ sau khi cưa xong là bao nhiêu?

A.  $V = 2\text{m}^3$                       B.  $V = 4\text{m}^3$                       C.  $V = 8\text{m}^3$                       D.  $V = 16\text{m}^3$

## Lời giải

## Chọn B

Gọi  $x, y(m)$  là các cạnh của tiết diện.

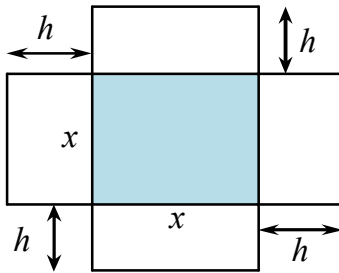
Theo Định lí Pitago ta có:  $x^2 + y^2 = 1^2$  (đường kính của thân cây là  $1m$ ).

Thể tích của cây xà sẽ cực đại khi diện tích của tiết diện là cực đại, nghĩa là khi  $x.y$  cực đại.

Ta có:  $x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow xy \leq \frac{1}{2}$ . Dấu "=" xảy ra khi  $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Thể tích khối gỗ sau khi cưa xong:  $V = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 8 = 4m^3$  (tiết diện là hình vuông).

**Câu 77. (VD)** Một hộp không nắp được làm từ một mảnh các tông theo mẫu như hình vẽ. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh  $x$  cm, chiều cao  $h$  cm và có thể tích  $500 \text{ cm}^3$ .



Giá trị của  $x$  để diện tích của mảnh các tông nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

## Lời giải

**Đáp án:**  $x = 10$  (cm).

Thể tích của hộp là:  $V = x^2 h = 500(\text{cm}^3)$ . Do đó  $h = \frac{500}{x^2}, x > 0$ .

Diện tích của mảnh các tông dùng làm hộp là:

$$S(x) = x^2 + 4hx = x^2 + \frac{2000}{x}, x > 0$$

$$S'(x) = 2x - \frac{2000}{x^2} = \frac{2(x^3 - 1000)}{x^2}, S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$$

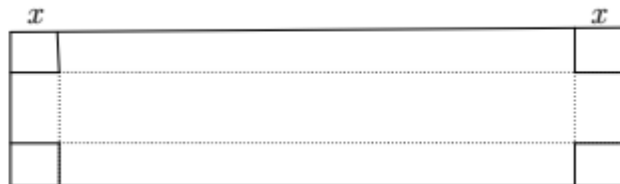
Bảng biến thiên

|         |   |    |           |
|---------|---|----|-----------|
| $x$     | 0 | 10 | $+\infty$ |
| $S'(x)$ |   | -  | 0         |
| $S(x)$  |   |    | 300       |

Vậy muốn tốn ít nguyên liệu nhất, ta lấy độ dài cạnh đáy hình hộp là  $x = 10$  (cm).

**Câu 78. (VD)** Một tấm bìa cứng hình chữ nhật có kích thước  $3m \times 8m$ . Người ta cắt mỗi góc của tấm bìa một hình vuông có cạnh là  $x$  để tạo ra hình hộp chữ nhật không nắp.

Hình vẽ :



Với giá trị nào của  $x$  thì thể tích hình hộp chữ nhật đạt giá trị lớn nhất ?

A.  $x = \frac{1}{3}m$

B.  $x = 1m$

C.  $x = \frac{2}{3}m$

D.  $x = \frac{4}{3}m$

## Lời giải

## Chọn C

Ta có:  $0 < x < \frac{3}{2}$  Gọi thể tích hình hộp là:  $V(x)$ . Khi đó:

$$V(x) = x(3-2x)(8-2x) = 4x^3 - 22x^2 + 24x$$

$$V'(x) = 12x^2 - 44x + 24 = 4(3x^2 - 11x + 6)$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

| $x$     | 0 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{2}$ | 3          |
|---------|---|---------------|---------------|------------|
| $V'(x)$ |   | +             | 0             | -          |
| $V(x)$  | 0 | $\nearrow$    | $V_{\max}$    | $\searrow$ |
|         | 0 |               | 0             |            |

**Câu 79. (VD)** Một cái hộp hình chữ nhật không nắp được làm từ một mảnh bìa cứng. Hộp có đáy là hình vuông cạnh  $x$  (cm), chiều cao  $h$  (cm) và có thể tích  $500 \text{ cm}^3$ . Gọi  $S(x)$  là diện tích mảnh bìa cứng theo  $x$ . Tìm  $x$  sao cho  $S(x)$  nhỏ nhất (tức tốn ít nguyên liệu nhất).

A. 10

B. 11

C. 9

D. 12

## Lời giải

$$V = x^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{x^2}$$

$$S(x) = x^2 + 4xh = x^2 + \frac{2000}{x}, x > 0$$

Bài toán quy về tìm GTNN của  $S(x) = x^2 + 4xh = x^2 + \frac{2000}{x}, x > 0$

**Câu 80. (VD)** Khi xây dựng nhà, chủ nhà cần làm một bể nước bằng gạch có dạng hình hộp có đáy là hình chữ nhật chiều dài  $d$  (m) và chiều rộng  $r$  (m) với  $d = 2r$ . Chiều cao bể nước là  $h$  (m) và thể tích bể là  $2 \text{ m}^3$ . Hỏi chiều cao bể nước như thế nào thì chi phí xây dựng là thấp nhất?

A.  $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ (m)}$

B.  $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \text{ (m)}$

C.  $\sqrt[3]{\frac{3}{2}} \text{ (m)}$

D.  $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ (m)}$

## Lời giải

Gọi  $x$  ( $x > 0$ ) là chiều rộng của đáy suy ra thể tích bể nước bằng

$$V = 2x^2 \cdot h = 2 \Leftrightarrow h = \frac{1}{x^2}$$

Diện tích xung quanh hồ và đáy bể là

$$S = 6x \cdot h + 2x^2 = \frac{6}{x} + 2x^2 \quad (x > 0)$$

Xét hàm số  $f(x) = \frac{6}{x} + 2x^2$  với  $x > 0$ .

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại  $x = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ .

Vậy chiều cao cần xây là  $h = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^2}} = \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{2}{3}} (m)$ .

- Câu 81. (VD)** Để thiết kế một chiếc bể cá hình hộp chữ nhật không nắp có chiều cao là  $60cm$ , thể tích  $96000cm^3$ . Người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành  $70000 VNĐ / m^2$  và loại kính để làm mặt đáy có giá thành  $100000 VNĐ / m^2$ . Tính chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá.

**Lời giải**

Gọi  $x, y(m)$  ( $x > 0, y > 0$ ) là chiều dài và chiều rộng của đáy bể

Khi đó theo đề ta suy ra:  $0,6xy = 0,096 \Leftrightarrow y = \frac{0,16}{x}$ .

Giá thành của bể cá được xác định theo hàm số sau:

$$f(x) = 2.0,6 \left( x + \frac{0,16}{x} \right) \cdot 70000 + 100000 \cdot x \cdot \frac{0,16}{x}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 84000 \left( x + \frac{0,16}{x} \right) + 16000$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = 84000 \left( 1 - \frac{0,16}{x^2} \right) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,4$$

Bảng biến thiên:

| $x$     | 0 | 0,4      | $+\infty$ |
|---------|---|----------|-----------|
| $f'(x)$ |   | 0        | +         |
| $f(x)$  |   | $f(0,4)$ |           |

Dựa vào bảng biến thiên suy ra chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là  $f(0,4) = 83200 VNĐ$

- Câu 82. (VD)** Người ta cần xây một bể nước ngầm dạng khối hộp chữ nhật có thể tích bằng  $500m^3$ . Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp ba lần chiều rộng. Chi phí để xây bể là  $2,5$  triệu đồng/ $m^2$ . Hãy xác định chi phí thấp nhất để xây bể (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

- A.** 1040,04 triệu đồng. **B.** 1050,04 triệu đồng.  
**C.** 1060,04 triệu đồng. **D.** 1052,26 triệu đồng.

**Lời giải**

Gọi chiều rộng của hình chữ nhật đáy bể là  $x(m)$ , ( $x > 0$ ).

Suy ra chiều dài của hình chữ nhật là  $3x$ .

Gọi  $h$  là chiều cao của bể, ta có  $V = Sh = 3x^2 \cdot h = 500 \Rightarrow h = \frac{500}{3x^2}$ .

Diện tích xây dựng của bể là

$$S = 2h \cdot x + 2h \cdot 3x + 2x \cdot 3x = 6x^2 + 8hx = 6x^2 + 8 \cdot \frac{500}{3x^2} \cdot x = 6x^2 + \frac{4000}{3x}.$$

Cách 1: Xét hàm số  $f(x) = 6x^2 + \frac{4000}{3x}$ ,  $x > 0$  ta có

$$f'(x) = 12x - \frac{4000}{3x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10}{\sqrt[3]{9}}.$$

Bảng biến thiên

|         |           |                                        |           |
|---------|-----------|----------------------------------------|-----------|
| $x$     | 0         | $\frac{10}{\sqrt[3]{9}}$               | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | -         | 0                                      | +         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $f\left(\frac{10}{\sqrt[3]{9}}\right)$ | $+\infty$ |

Suy ra giá trị nhỏ nhất của  $f(x)$  bằng  $f\left(\frac{10}{\sqrt[3]{9}}\right)$  khi  $x = \frac{10}{\sqrt[3]{9}} \approx 4,807(m)$ .

Vậy chi phí thấp nhất để xây bể là  $f\left(\frac{10}{\sqrt[3]{9}}\right) \cdot 2,5 = \left[ 6\left(\frac{10}{\sqrt[3]{9}}\right)^2 + \frac{4000}{3 \cdot \frac{10}{\sqrt[3]{9}}} \right] \cdot 2,5 \approx 1040,04$  (triệu

đồng).

Cách 2:

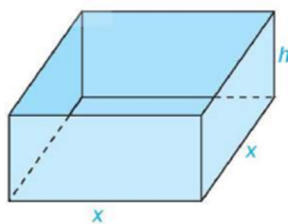
Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$f(x) = 6x^2 + \frac{4000}{3x} = 6x^2 + \frac{2000}{3x} + \frac{2000}{3x} \geq 3\sqrt[3]{6x^2 \cdot \frac{2000}{3x} \cdot \frac{2000}{3x}} = 3\sqrt[3]{\frac{8000000}{3}}.$$

Dấu bằng xảy ra khi  $6x^2 = \frac{2000}{3x} \Leftrightarrow x = \frac{10}{\sqrt[3]{9}}.$

Suy ra chi phí thấp nhất để xây bể là  $3\sqrt[3]{\frac{8000000}{3}} \cdot 2,5 \approx 1040,04$  triệu đồng.

**Câu 83. (VD)** Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông và diện tích bề mặt bằng  $108 \text{ cm}^2$  như Hình 1.17. Tìm chiều cao của chiếc hộp sao cho thể tích của chiếc hộp là lớn nhất.



Hình 1.17

**Lời giải**

**Đáp án: 3.**

Hình hộp trên có độ dài cạnh đáy là  $x$  (cm,  $x > 0$ ) và chiều cao là  $h$  (cm,  $h > 0$ )

Diện tích bề mặt của hình hộp là  $108 \text{ cm}^2$  nên  $x^2 + 4xh = 108 \Rightarrow h = \frac{108 - x^2}{4x}$  (cm) (điều kiện

$0 < x < \sqrt{108}$ ).

Thể tích của hình hộp là:  $V = x^2 \cdot h = x^2 \cdot \frac{108 - x^2}{4x} = \frac{108x - x^3}{4} \text{ (cm}^3\text{)}$ . Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $V = -\frac{x^3}{4} + 27x \quad (0 < x < \sqrt{108})$

Ta có:  $V' = \frac{-3x^2 + 108}{4}, V' = 0 \Leftrightarrow x = 6 \text{ (do } 0 < x < \sqrt{108}\text{)}$

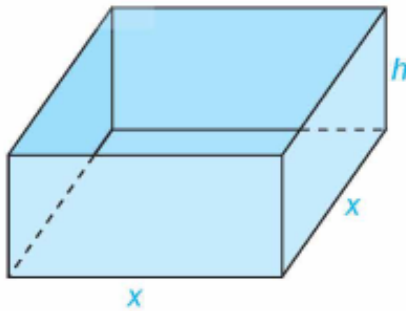
Lập bảng biến thiên của hàm số

|      |   |     |              |
|------|---|-----|--------------|
| $x$  | 0 | 6   | $\sqrt{108}$ |
| $V'$ |   | +   | 0            |
|      |   |     | -            |
| $V$  | 0 | 108 | 0            |

Do đó, thể tích của chiếc hộp là lớn nhất khi độ dài cạnh đáy  $x = 6 \text{ cm}$

Khi đó, chiều cao của chiếc hộp là:  $\frac{108 - 6^2}{4 \cdot 6} = 3 \text{ (cm)}$ .

**Câu 84. (VD)** Một bể nước có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông và diện tích bề mặt bằng  $108 \text{ cm}^2$  như Hình vẽ. Các kích thước của chiếc bể sao cho thể tích của hộp là lớn nhất là



**A.**  $x = 6, h = 3$ .

**B.**  $x = 3, h = 6$ .

**C.**  $x = 3, h = 2$ .

**D.**  $x = 3, h = 4$ .

**Lời giải**

Tổng diện tích bề mặt của hộp chữ nhật là  $S = x^2 + 4xh = 108 \text{ (m}^2\text{)} \Rightarrow h = \frac{108 - x^2}{4x} \text{ (} x > 0, h > 0 \text{)}$

Thể tích hộp là  $V(x) = x^2 \cdot h = x^2 \cdot \frac{108 - x^2}{4x} = \frac{108x - x^3}{4} = 27x - \frac{x^3}{4}$

Ta đi tìm GTLN của  $V(x) = 27x - \frac{x^3}{4}$

$V'(x) = 27 - \frac{3x^2}{4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -6 \end{cases}$ . Mà  $x > 0 \Rightarrow x = 6$

Bảng biến thiên

|         |   |                                                                                     |           |                                                                                     |           |
|---------|---|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| $x$     | 0 | 6                                                                                   | $+\infty$ |                                                                                     |           |
| $V'(t)$ | 0 | +                                                                                   | 0         | −                                                                                   |           |
| $V(t)$  | 0 |  | 92        |  | $-\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy thể tích của bể đạt GTLN khi  $x = 6$  và  $h = 3$ .

**Câu 85. (VD)** Để thiết kế một chiếc bể cá hình hộp chữ nhật không có nắp có chiều cao là  $60\text{cm}$ , thể tích  $96000(\text{cm}^3)$ . Người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành  $70000\text{đ}/\text{m}^2$  và loại kính để làm mặt đáy có giá thành  $100000\text{đ}/\text{m}^2$ . Chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là

A. 83200.

B. 320000.

C. 832000.

D. 32000.

**Lời giải**

Gọi  $x, y(\text{m})$  ( $x > 0, y > 0$ ) là hai kích thước của đáy bể, khi đó theo đề ta có  $0,6 \cdot x \cdot y = 0,096 \Rightarrow y = \frac{0,16}{x}$ .

Chi phí làm bể cá là:

$$\begin{aligned} f(x) &= 100000xy + 2 \cdot 0,6 \cdot (x + y) \cdot 70000 = 100000 \cdot x \cdot \frac{0,16}{x} + \left( \frac{0,16}{x} + x \right) \cdot 84000 \\ &= \left( \frac{0,16}{x} + x \right) \cdot 84000 + 16000 \end{aligned}$$

Ta có:  $f'(x) = 84000 \cdot \left( 1 - \frac{0,16}{x^2} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 0,4$

Bảng biến thiên:

|         |   |          |           |
|---------|---|----------|-----------|
| $x$     | 0 | 0,4      | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | - | 0        | +         |
| $f(x)$  |   | $f(0,4)$ |           |

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy chi phí làm bể cá thấp nhất là  $f(0,4) = 83200$ .

**Câu 86. (VD)** Nhà sản xuất muốn sản xuất hộp đựng sữa dạng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông, thể tích  $330\text{ml}$ . Để tiết kiệm chi phí thì phải thiết kế sao cho diện tích toàn phần nhỏ nhất. Khi đó chiều cao của hộp sữa bằng ..... (kết quả làm tròn đến 1 chữ số sau dấu phẩy).

**Lời giải**

Đáp số:  $h = 47,75\text{cm}$

Gọi cạnh đáy là  $x$ , chiều cao là  $h$ , với  $x, h > 0$ .

Đổi  $330\text{ml} = 330\text{cm}^3$

Thể tích là  $V = x^2 \cdot h = 330 \Rightarrow h = \frac{330}{x^2}$

Diện tích toàn phần là  $S_{tp} = 2x^2 + 4xh = 2x^2 + \frac{1320}{x}$

Xét hàm số  $f(x) = 2x^2 + \frac{1320}{x}$

Có  $f'(x) = 4x - \frac{1320}{x^2}$ ,  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{330}$

Ta có bảng biến thiên

|         |           |                 |           |
|---------|-----------|-----------------|-----------|
| $x$     | 0         | $\sqrt[3]{330}$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | - 0 +           |           |
| $f(x)$  | $+\infty$ |                 | $+\infty$ |

Vậy diện tích toàn phần bé nhất khi  $x = \sqrt[3]{330} \Rightarrow h = 47,75 \text{ cm}$

**Câu 87. (VD)** Một người bán gạo muốn đóng một thùng tôn đựng gạo có thể tích không đổi bằng  $10 \text{ m}^3$ , thùng tôn hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông, không nắp. Trên thị trường, giá tôn làm đáy thùng là  $90000 / \text{m}^2$  và giá tôn làm thành xung quanh thùng là  $40000 / \text{m}^2$ . Hỏi người bán gạo đó cần đóng thùng đựng gạo với cạnh đáy bằng bao nhiêu để chi phí mua nguyên liệu là nhỏ nhất?

### Lời giải

Gọi chiều dài cạnh đáy hình vuông và chiều cao của thùng đựng gạo lần lượt là  $x, y \text{ (m)}$ ;

( $x > 0, y > 0$ ). Ta có thể tích của thùng là:  $V = x^2 y = 10 \Rightarrow y = \frac{10}{x^2}$ .

Diện tích đáy hình hộp là  $x^2$  và diện tích xung quanh là  $4xy$  nên chi phí để làm thùng tôn là

$$90000x^2 + 160000xy = 90000x^2 + \frac{1600000}{x} = f(x) \quad 120000\sqrt[3]{900}$$

Trên khoảng  $(0; +\infty)$  ta có  $f'(x) = 180000x - \frac{1600000}{x^2}$ .

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{9}}.$$

Ta có bảng biến thiên

|         |           |                                     |           |
|---------|-----------|-------------------------------------|-----------|
| $x$     | 0         | $\frac{2\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{9}}$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | - 0 +                               |           |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $120000\sqrt[3]{900}$               | $+\infty$ |

Vậy chi phí nhỏ nhất bằng  $120000\sqrt[3]{900}$  đồng khi và chỉ khi cạnh đáy hình hộp bằng  $\frac{2\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{9}}$ .

**Câu 88. (VD)** Khi xây nhà, anh Tùng cần xây một bể nước mưa có thể tích  $V = 6 \text{ m}^3$  dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài gấp ba lần chiều rộng, đáy và nắp và các mặt xung quanh đều được đổ bê tông cốt thép. Phần nắp bể để hở một khoảng hình vuông có diện tích bằng  $\frac{2}{9}$  nắp bể. Biết rằng chi phí nhân công và vật liệu là  $10000000 \text{ đồng}/\text{m}^2$  tính theo diện tích xây dựng. Tính chi phí thấp nhất mà anh Tùng phải trả khi xây bể (làm tròn đến hàng trăm nghìn)?

### Lời giải

Đáp số: 21000000 đồng.

Gọi chiều rộng, chiều dài của bể lần lượt là  $x$  và  $3x \text{ (m)}$ , với  $x > 0$ .

$$\text{Ta có: } V = 6 \text{ m}^3 \Rightarrow h = \frac{6}{3x^2} = \frac{2}{x^2} \text{ (m)}$$

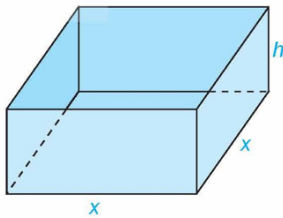
$$\text{Tổng diện tích xây dựng } T = 2x \cdot \frac{2}{x^2} + 2 \cdot 3x \cdot \frac{2}{x^2} + 2x \cdot 3x - x \cdot 3x \cdot \frac{2}{9} = \frac{16x^2}{3} + \frac{16}{x}$$

$$T' = \frac{32x}{3} - \frac{16}{x^2}; T' = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

|        |           |                         |           |
|--------|-----------|-------------------------|-----------|
| $x$    | 0         | $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ | $+\infty$ |
| $T'$   | -         | 0                       | +         |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $8\sqrt[3]{18}$         | $+\infty$ |

Số tiền ít nhất anh Tùng cần bỏ ra:  $8\sqrt[3]{18} \cdot 1000000 \approx 21000000$  (đồng)

**Câu 89. (VD)** Một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông cạnh  $x(cm)$  và chiều cao  $h(cm)$ . Biết tổng diện tích bề mặt của chiếc hộp bằng  $243cm^2$ , tìm  $x$  để chiếc hộp có thể tích lớn nhất.



**Lời giải**

**Đáp số: 9**

Diện tích bề mặt của hình hộp là  $243cm^2$  nên  $x^2 + 4xh = 243 \Rightarrow h = \frac{243 - x^2}{4x} (cm)$

Thể tích của hình hộp là:  $V = x^2 \cdot h = x^2 \cdot \frac{243 - x^2}{4x} = \frac{243x - x^3}{4} (cm^3)$ .

Khảo sát hàm  $f(x) = \frac{243x - x^3}{4}, 0 < x < 9\sqrt{3}$ .

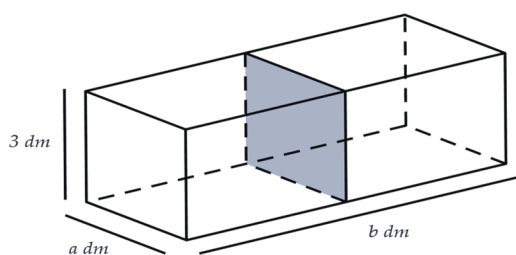
Ta có:  $f'(x) = \frac{-3x^2 + 243}{4}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 9$  (do  $x > 0$ )

Bảng biến thiên:

|         |           |      |     |       |             |           |
|---------|-----------|------|-----|-------|-------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-9$ | $0$ | $9$   | $9\sqrt{3}$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | -         | 0    | +   | +     | 0           | -         |
| $f(x)$  | $+\infty$ |      | 0   | 364,5 |             | $-\infty$ |

Dựa vào BBT suy ra thể tích của hộp lớn nhất khi độ dài cạnh đáy  $x = 9(cm)$ .

- Câu 90. (VD)** Người ta muốn thiết kế một bể cá bằng kính không có nắp với thể tích  $72 \text{ dm}^3$ , chiều cao là  $3 \text{ dm}$ . Một vách ngăn (cùng bằng kính) ở giữa, chia bể cá thành hai ngăn, với các kích thước  $a, b$  (đơn vị  $\text{dm}$ ) như hình vẽ. Với giá trị  $a, b$  để bể cá tốn ít nguyên liệu nhất (tính cả tấm kính ở giữa), coi bể dày các tấm kính như nhau và không ảnh hưởng đến thể tích của bể. Kết quả  $a + b = \dots\dots\dots$



**Lời giải**

Đáp số:  $a + b = 10(\text{dm})$

Thể tích của bể cá:  $V = 3ab = 72 \text{ dm}^3 \Leftrightarrow b = \frac{72}{3a} = \frac{24}{a}$ , với  $a, b > 0$ .

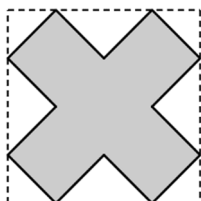
Diện tích kính để làm bể cá như hình vẽ:

$$S = 3.3a + 2.3b + ab = 9a + 6 \cdot \frac{24}{a} + a \cdot \frac{24}{a} = 9a + \frac{144}{a} + 24 \geq 2\sqrt{9a \cdot \frac{144}{a}} + 24 \Leftrightarrow S \geq 96.$$

$$S = 96 \Leftrightarrow 9a = \frac{144}{a} \Leftrightarrow a = 4 \Rightarrow b = 6.$$

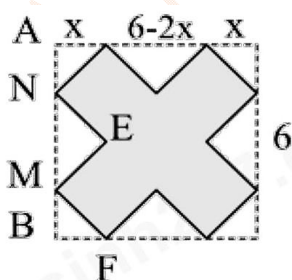
Vậy  $a + b = 10(\text{dm})$

- Câu 91. (VD)** Từ hình vuông có cạnh bằng 6 người ta cắt bỏ các tam giác vuông cân tạo thành hình tô đậm như hình vẽ. Sau đó người ta gấp thành hình hộp chữ nhật không nắp. Thể tích lớn nhất của khối hộp bằng



**Lời giải**

Gọi cạnh hình tam giác cân bị cắt bỏ có độ dài  $x$  ( $0 < x < 3$ )



$$\Rightarrow AN = BM = x \Rightarrow MN = 6 - 2x$$

$$\Rightarrow EM = EN = \frac{6 - 2x}{\sqrt{2}}$$

Hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông cạnh  $MF = x\sqrt{2}$ ,

$$\text{Có chiều cao } EN = \frac{6 - 2x}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow V = MF^2 \cdot EN = 2x^2 \cdot \frac{6-2x}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}x^2(6-2x) = -2\sqrt{2}x^3 + 6\sqrt{2}x^2$$

$$\Rightarrow V' = -6\sqrt{2}x^2 + 12\sqrt{2}x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{\max} = V(2) = -2\sqrt{2} \cdot 2^3 + 6\sqrt{2} \cdot 2^2 = 8\sqrt{2}$$

**Câu 92. (VD)** Ông A dự định sử dụng hết  $6,5m^2$  kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

### Lời giải

Gọi  $a, b, c$  ( $a > 0, b > 0, c > 0$ ) lần lượt là chiều dài, chiều rộng và chiều cao của bể cá.

Theo đề ta có: 
$$\begin{cases} a = 2b \\ S = ab + 2bc + 2ac = 6,5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ 2b^2 + 2bc + 4bc = 6,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ 2b^2 + 6bc = 6,5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ c = \frac{6,5 - 2b^2}{6b} \end{cases}$$

Thể tích của bể cá:  $V = abc = 2b^2 \cdot \frac{6,5 - 2b^2}{6b} = \frac{6,5b - 2b^3}{3}$

$$V' = \frac{13}{6} - 2b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{\sqrt{39}}{6} \text{ (N)} \\ b = -\frac{\sqrt{39}}{6} \text{ (L)} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

|      |   |                                       |           |
|------|---|---------------------------------------|-----------|
| $b$  | 0 | $\frac{\sqrt{39}}{6}$                 | $+\infty$ |
| $V'$ | + | 0                                     | -         |
| $V$  |   | $\frac{13\sqrt{39}}{54} \approx 1,50$ |           |

Vậy  $V_{\max} \approx 1,50$ .

**Câu 93. (VD)** Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích  $V$  (lít) của lượng xăng trong bình

xăng tính theo thời gian bơm xăng  $t$  (phút) được cho bởi công thức  $V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4, 0 \leq t \leq 0,5$ .

(Nguồn: R.I.Charles et al. Algebra, Pearson)

a) Ban đầu trong bình xăng có bao nhiêu lít xăng?

- b) Sau khi bơm 30 giây thì bình xăng đầy. Hỏi dung tích của bình xăng trong xe là bao nhiêu lít?
- c) Khi xăng chảy vào bình xăng, gọi  $V'(t)$  là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm  $t$  với  $0 \leq t \leq 0,5$ . Xăng chảy vào bình xăng ở thời điểm nào có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất?

**Lời giải**

(a) Ta có:  $V(0) = 4$ . Do đó ban đầu trong bình xăng có 4 lít xăng.

(b) Sau khi bơm 30 giây, tức 0,5 phút thì bình xăng đầy. Ta có  $V(0,5) = 41,5$ . Vậy dung tích của bình xăng trong xe là 41,5 lít.

(c) Ta có  $V'(t) = 300(2t - 3t^2)$ ,  $t \in [0; 0,5]$ . Có  $V''(t) = 300(2 - 6t)$ .

Khi đó trên khoảng  $(0; 0,5)$ ,  $V''(t) = 0$  khi  $t = \frac{1}{3}$ .

$V'(0) = 0$ ;  $V'\left(\frac{1}{3}\right) = 100$ ;  $V'(0,5) = 75$ . Do đó  $\max_{[0; 0,5]} V'(t) = 100$  tại  $t = \frac{1}{3}$ .

Vậy xăng chảy vào bình ở thời điểm  $t = \frac{1}{3}s$  kể từ khi bắt đầu bơm có tốc độ tăng.

**Câu 94. (VD)** Ho ép khí quản co lại, ảnh hưởng đến tốc độ của không khí vào khí quản. Tốc độ của không khí đi vào khí quản khi ho được cho bởi công thức

$$V = k(R - r)r^2 \text{ với } 0 \leq r < R,$$

Trong đó  $k$  là hằng số,  $R$  là bán kính bình thường của khí quản,  $r$  là bán kính khí quản khi ho (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014). Hỏi bán kính của khí quản khi ho bằng bao nhiêu thì tốc độ của không khí đi vào khí quản là lớn nhất?

**Lời giải**

Xét hàm số  $V(r) = k(R - r)r^2 = kRr^2 - kr^3$  với  $0 \leq r < R$ ;

Ta có  $V'(r) = 2kRr - 3kr^2$ ;

$$V'(r) = 0 \Leftrightarrow 2kRr - 3kr^2 = 0 \Leftrightarrow kr(2R - 3r) = 0 \Leftrightarrow r = 0 \text{ (nhận) hoặc } r = \frac{2}{3}R \text{ (nhận)}$$

Bảng biến thiên của hàm số  $V(r)$  như sau:

|         |   |                              |     |
|---------|---|------------------------------|-----|
| $r$     | 0 | $\frac{2R}{3}$               | $R$ |
| $V'(r)$ | + | 0                            | -   |
| $V(r)$  | 0 | $V\left(\frac{2R}{3}\right)$ | 0   |

Dựa vào bảng biến thiên trên, ta thấy hàm số  $V(r)$  đạt giá trị lớn nhất tại  $r = \frac{2}{3}R$ .

Vậy khi  $r = \frac{2}{3}R$  thì tốc độ của không khí đi vào khí quản là lớn nhất.

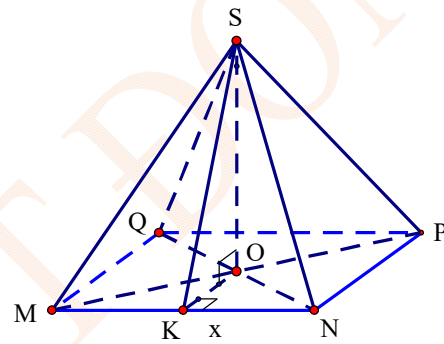
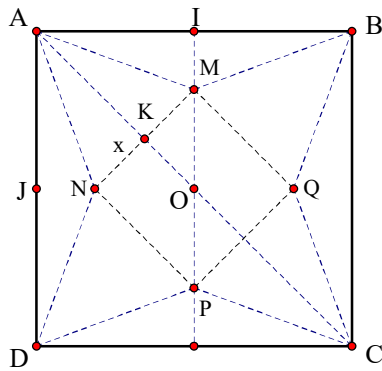
**Câu 95. (VD)** Ông Nam cần xây dựng một bể chứa nước có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp đậy để phục vụ cho việc tưới cây trong vườn. Do các điều kiện về diện tích vườn, ông Nam cần bể có thể tích là  $36 \text{ m}^3$ , đáy bể có chiều dài gấp hai lần chiều rộng và chiều rộng không quá 4 m, biết rằng chi phí vật liệu xây dựng mỗi mét vuông diện tích bề mặt là như nhau.

Gọi  $x(m)$  là chiều rộng của bể, ta có  $0 < x \leq 4$ . Khi đó

- a) Chiều dài của bể là  $2x$  ( m )  
b) Chiều cao của bể là  $\frac{18}{x^2}(m)$ .  
c) Tổng diện tích các mặt cần xây là:  $2x^2 + \frac{108}{x}$ .  
d) Chiều cao bể nước bằng 3 ( m ) thì tổng chi phí vật liệu là nhỏ nhất

**Câu 96. (VD)** Cho một tấm bìa hình vuông có cạnh  $2m$ . Từ tấm bìa này làm một mô hình kim tự tháp Ai Cập, người ta cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy là các cạnh của hình vuông rồi gấp lên và ghép lại thành một hình chóp tứ giác đều. Thể tích của mô hình lớn nhất khi cạnh đáy của mô hình bằng  $\frac{a\sqrt{2}}{b}(m)$  ( $a, b \in \mathbb{Z}; a, b$  nguyên tố cùng nhau). Tính tổng  $a^2 + b^2$ ?

**Lời giải**



**Đáp số:** 41.

Gọi độ dài cạnh đáy của hình chóp là  $x(m)$ . Do  $MN < IJ = \sqrt{2} \Rightarrow x \in (0; \sqrt{2})$ .

Ta có:  $OK = \frac{x}{2}; OA = \frac{AC}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow SK = AK = \sqrt{2} - \frac{x}{2}$ .

Do vậy:  $SO = \sqrt{SK^2 - OK^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2} - \frac{x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}x}$ .

Khi đó thể tích khối chóp là:  $V = \frac{1}{3}x^2\sqrt{2 - \sqrt{2}x}$ .

Xét  $f(x) = \frac{1}{3}x^2\sqrt{2 - \sqrt{2}x} \left( x \in (0; \sqrt{2}) \right)$ , ta có:

$$f'(x) = \frac{1}{3} \left( 2x\sqrt{2 - \sqrt{2}x} - x^2 \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}x}} \right) = \frac{1}{3} \left( \frac{4x(2 - \sqrt{2}x) - \sqrt{2}x^2}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}x}} \right) = \frac{8x - 5\sqrt{2}x^2}{3(2\sqrt{2 - \sqrt{2}x})}$$

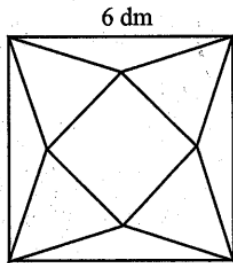
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x - 5\sqrt{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{4\sqrt{2}}{5} \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

|         |                                                                                   |                       |            |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|------------|
| $x$     | $0$                                                                               | $\frac{4\sqrt{2}}{5}$ | $\sqrt{2}$ |
| $f'(x)$ | $+$                                                                               | $0$                   | $-$        |
| $f(x)$  |  |                       |            |

Ta thấy thể tích của mô hình lớn nhất khi cạnh đáy của mô hình là  $x = \frac{4\sqrt{2}}{5} \Rightarrow a = 4, b = 5 \Rightarrow a^2 + b^2 = 41$ .

**Câu 97. (VD)** Từ một tấm bìa mỏng hình vuông cạnh  $6\text{ dm}$ , bạn Hoa cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy là cạnh của hình vuông ban đầu và đỉnh là đỉnh của một hình vuông nhỏ phía trong rồi gập lên, ghép lại tạo thành một khối chóp tứ giác đều (Hình 7).

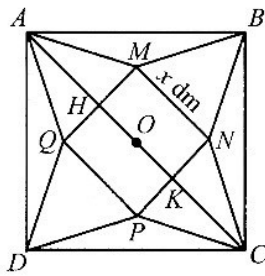


Thể tích của khối chóp có giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu decimét khối (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

**Lời giải**

**Đáp số: 7,3**

Gọi cạnh đáy của hình chóp tứ giác đều là  $x(\text{dm})$  với  $0 < x < 6\sqrt{2}$  như hình bên.



$$\text{Ta có: } AH = \frac{AC - HK}{2} = 3\sqrt{2} - \frac{x}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Đường cao của hình chóp tứ giác đều là: } h &= \sqrt{AH^2 - OH^2} = \sqrt{\left(3\sqrt{2} - \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{18 - 3\sqrt{2}x}. \end{aligned}$$

$$\text{Thể tích khối chóp là: } V = \frac{1}{3}hx^2 = \frac{1}{3}x^2\sqrt{18 - 3\sqrt{2}x} = \frac{1}{3}\sqrt{x^4(18 - 3\sqrt{2}x)}.$$

Để tìm giá trị lớn nhất của  $V$ , ta đi tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = x^4(18 - 3\sqrt{2}x)$  với  $0 < x < 6\sqrt{2}$ .

Ta có:  $f'(x) = x^3(-15\sqrt{2}x + 72)$ ,  $f'(x) = 0$  khi  $x = 0$  hoặc  $x = \frac{12\sqrt{2}}{5}$ .

Bảng biến thiên của  $f(x)$  như sau

|         |   |                                      |             |   |
|---------|---|--------------------------------------|-------------|---|
| $x$     | 0 | $\frac{12\sqrt{2}}{5}$               | $6\sqrt{2}$ |   |
| $f'(x)$ | 0 | +                                    | 0           | − |
| $f(x)$  | 0 | $f\left(\frac{12\sqrt{2}}{5}\right)$ | −93312      |   |

Từ bảng biến thiên ta có  $\max_{(0;6\sqrt{2})} f(x) = f\left(\frac{12\sqrt{2}}{5}\right) \approx 477,75$  tại  $x = \frac{12\sqrt{2}}{5}$ .

Vậy thể tích của khối chóp có giá trị lớn nhất bằng

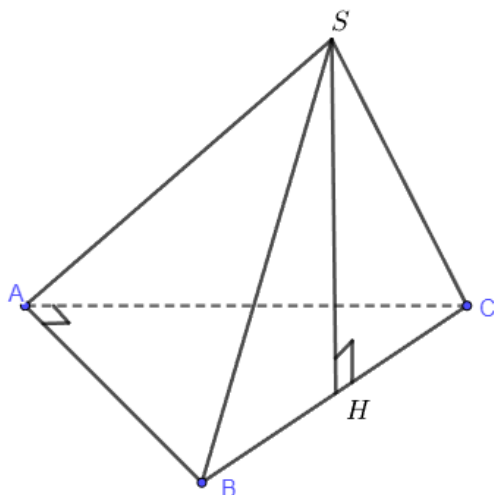
$$V_{\max} = \frac{1}{3} \sqrt{\left(\frac{12\sqrt{2}}{5}\right)^4 \left(18 - 3\sqrt{2} \cdot \frac{12\sqrt{2}}{5}\right)} \approx 7,3 (\text{dm}^3).$$

**Câu 98. (VD)** Một nhóm bạn đi Picnic muốn cắm trại qua đêm. Biết trại cắm là một hình chóp tam giác đỉnh  $S$  cách đều các chân trại  $A, B, C$  một đoạn bằng  $3m$ . Biết đáy trại là một tam giác vuông tại  $A$  và  $AB = 2m$ . Nhóm muốn cắm trại sao cho thể tích của trại là lớn nhất cho không gian thoải mái. Khi đó độ dài  $AC$  bằng bao nhiêu?

Độ dài  $AC$  bằng.....

**Lời giải**

Gọi  $H$  là trung điểm  $BC$  suy ra  $H$  là tâm ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Do  $SA = SB = SC$  nên ta có  $SH \perp (ABC)$ .



Đặt  $AC = x$ . Ta có

$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{x^2 + 4}.$$

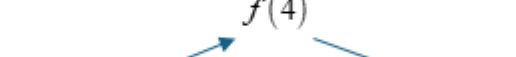
Trong tam giác  $SBH$  ta có  $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \frac{\sqrt{32 - x^2}}{2}$ ,  $0 < x < 4\sqrt{2}$

Thể tích của lều

$$V = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{32-x^2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x = \frac{1}{6} x \cdot \sqrt{32-x^2}.$$

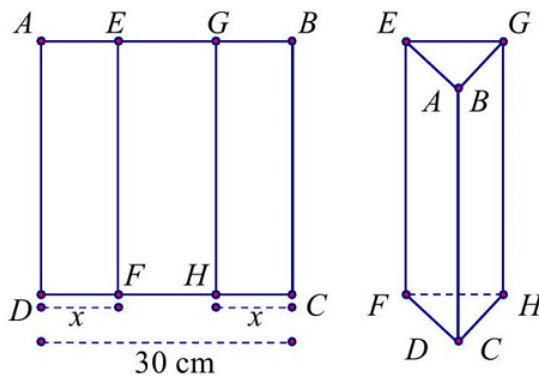
Xét hàm số  $f(x) = x \cdot \sqrt{32-x^2}$  ta có  $f'(x) = \sqrt{32-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{32-x^2}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 32-x^2 = x^2 \Rightarrow x = 4$ . Ta có bảng biến thiên

|         |                                                                                   |   |             |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------|---|-------------|
| $x$     | 0                                                                                 | 4 | $4\sqrt{2}$ |
| $f'(x)$ | +                                                                                 | 0 | -           |
| $f(x)$  |  |   |             |

Từ bảng biến thiên suy ra độ dài cạnh  $AC$  là  $4m$

**Câu 99. (VD)** Một tấm kẽm hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng 30 cm. Người ta gấp tấm kẽm theo hai cạnh  $EF$  và  $GH$  cho đến khi  $AD$  và  $BC$  trùng nhau như hình vẽ bên để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy.



Khi đó:

a) Thể tích khối trụ được tính bằng công thức  $V = 30S$  trong đó  $S$  là diện tích của tam giác  $AEG$ .

b) Diện tích của tam giác  $AEG$  bằng:  $\sqrt{30} \cdot \sqrt{(15-x)^2 (2x-15)}$

c) Giá trị của  $x$  để thể tích khối lăng trụ lớn nhất là  $x = 10$  (cm)

d) Thể tích khối lăng trụ lớn nhất bằng 1250

**Câu 100. (VD)** Người ta muốn sản xuất một bể nước theo dạng khối lăng trụ tứ giác đều, không có nắp trên, làm bằng kính và có thể tích là  $16m^3$ . Biết giá của mỗi mét vuông kính là 500 000 đồng. Tìm số tiền tối thiểu phải trả để làm bể nước trên (làm tròn đến hàng đơn vị).

### Lời giải

Gọi cạnh đáy của bể nước có độ dài là  $x(m)$  và chiều cao của bể nước là  $h(m)$ . Điều kiện  $x, h > 0$ .

Khi đó thể tích của bể nước là  $16m^3$  nên  $x^2 h = 16 \Leftrightarrow h = \frac{16}{x^2}$ .

Diện tích cần để xây bể nước (bao gồm diện tích xung quanh và diện tích mặt đáy) là

$$S = 4xh + x^2 = 4x \cdot \frac{16}{x^2} + x^2 = \frac{64}{x} + x^2.$$

Để tìm số tiền tối thiểu, ta tìm giá trị nhỏ nhất của hàm  $y = S(x)$  với  $x > 0$ .

Ta có  $S'(x) = -\frac{64}{x^2} + 2x$ . Cho  $S'(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 64 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{32}$ .

Lập bảng biến thiên, ta dễ thấy  $\min_{(0;+\infty)} S(x) = S(\sqrt[3]{32})$ .

**Câu 101. (VD)** Để thiết kế một chiếc bể cá hình chữ nhật có chiều cao là 60 cm, thể tích là 96.000 cm<sup>3</sup>, người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70.000 đồng /m<sup>2</sup> và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là 100.000 đồng /m<sup>2</sup>. Chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là:

A. 83.200.000 đồng      B. 382.000 đồng      C. 83.200 đồng      D. 8.320.000 đồng.

**Loại 3: Thiết lập hàm liên quan đến mặt tròn xoay: Nón, trụ, cầu.**

**Câu 102. (VD)** Trong các hình trụ nội tiếp hình cầu bán kính  $R$ , hình trụ có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

**Đáp án:** thể tích hình trụ là  $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$ .

Gọi chiều cao, bán kính đáy và thể tích của hình trụ nội tiếp hình cầu lần lượt là  $h$ ,  $r$  và  $V$ . Khi đó,  $V = \pi r^2 h$ . Vì  $r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$  nên  $V = \pi \left( R^2 - \frac{h^2}{4} \right) h = \pi \left( R^2 h - \frac{h^3}{4} \right)$ .

$V(h) = \pi \left( R^2 h - \frac{h^3}{4} \right)$ ,  $h \in (0; 2R)$ ;  $V'(h) = \pi \left( R^2 - \frac{3h^2}{4} \right)$ ;  $V'(h) = 0 \Leftrightarrow h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ .

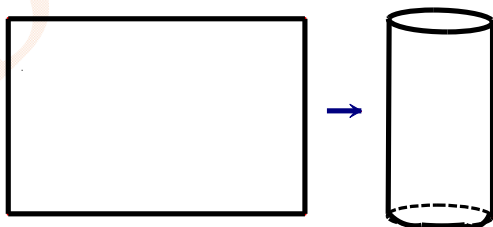
Bảng biến thiên:

|         |   |                              |      |   |
|---------|---|------------------------------|------|---|
| $h$     | 0 | $\frac{2R}{\sqrt{3}}$        | $2R$ |   |
| $V'(h)$ |   | +                            | 0    | - |
| $V(h)$  | 0 | $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$ | 0    |   |

Vậy hình trụ nội tiếp hình cầu bán kính  $R$  có thể tích lớn nhất khi chiều cao của nó bằng  $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ .

Khi đó, thể tích hình trụ là  $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$ .

**Câu 103. (VD)** Bạn Hiền là một học sinh lớp 12, bố bạn là một thợ hàn. Bố bạn định làm một chiếc thùng hình trụ từ một mảnh tôn có chu vi 120 cm theo cách dưới đây:



Bằng kiến thức đã học em giúp bố bạn Hiền chọn mảnh tôn để làm được chiếc thùng có thể tích lớn nhất, khi đó chiều dài, rộng của mảnh tôn lần lượt là bao nhiêu?

**Lời giải**

**Đáp án:** chiều dài là 40 cm; chiều rộng là 20 cm.

Gọi một chiều dài là  $x(cm)$  ( $0 < x < 60$ ), khi đó chiều còn lại là  $60 - x(cm)$ , giả sử quần cạnh có chiều dài là  $x$  lại thì bán kính đáy là  $r = \frac{x}{2\pi}; h = 60 - x$ .

Ta có:  $V = \pi r^2 \cdot h = \frac{-x^3 + 60x^2}{4\pi}$ .

Xét hàm số:  $f(x) = -x^3 + 60x^2, x \in (0; 60)$

$$f'(x) = -3x^2 + 120x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 40 \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên, ta thấy  $f(x) = -x^3 + 60x^2, x \in (0; 60)$  lớn nhất khi  $x = 40$ .  $60 - x = 20$ .

Khi đó chiều dài là 40 cm; chiều rộng là 20 cm.

**Câu 104. (VD)** Anh Hà dự định làm một cái thùng đựng dầu hình trụ bằng sắt có nắp đáy thể tích  $10 m^3$ .

Chi phí làm mỗi  $m^2$  đáy là 400 ngàn đồng, mỗi  $m^2$  nắp là 200 ngàn đồng, mỗi  $m^2$  mặt xung quanh là 300 ngàn đồng. Để chi phí làm thùng là ít nhất thì anh Hà cần chọn chiều cao của thùng là..... (Xem độ dày của tấm sắt làm thùng là không đáng kể, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

### Lời giải

**Đáp số:** 2,34

Gọi bán kính đáy của hình trụ là  $R, R > 0$ . Ta có

$$V = \pi R^2 h \Rightarrow h = \frac{10}{\pi R^2}.$$

Suy ra chi phí (đơn vị ngàn đồng) làm thùng

$$C = \pi R^2 \cdot 400 + \pi R^2 \cdot 200 + 2\pi R h \cdot 300$$

$$= 600 \left( \pi R^2 + \frac{10}{R} \right)$$

$$C' = 600 \left( 2\pi R - \frac{10}{R^2} \right); C' = 0 \Leftrightarrow 2\pi R - \frac{10}{R^2} = 0 \Leftrightarrow R^3 = \frac{5}{\pi} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$$

Bảng biến thiên

|      |           |                           |           |
|------|-----------|---------------------------|-----------|
| $x$  | 0         | $\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$ | $+\infty$ |
| $C'$ | —         | 0                         | +         |
| $C$  | $+\infty$ | $1800\sqrt[3]{25\pi}$     | $+\infty$ |

Dẫn đến

$$\min_{(0; +\infty)} C = 1800\sqrt[3]{25\pi} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}.$$

Vậy để chi phí nhỏ nhất thì chiều cao của hình trụ là  $h = \frac{10}{\sqrt[3]{25\pi}} \approx 2,34 m$ .

**Câu 105. (VD)** Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Muốn thể

tích của khối trụ đó bằng 2 và diện tích toàn phần hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy gần số nào nhất?

A. 0,68

B. 0,6

C. 0,12

D. 0,52

**Lời giải**

Gọi  $x$  ( $x > 0$ ) là bán kính đáy của lon sữa.

$$\text{Khi đó } V = \pi x^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi x^2}.$$

Diện tích toàn phần của lon sữa là

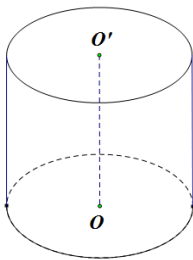
$$S(x) = 2\pi x^2 + 2\pi xh = 2\pi x^2 + 2\pi x \frac{V}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + 2\frac{V}{x} = 2\pi x^2 + \frac{4}{x}, x > 0$$

Bài toán quy về tìm GTNN của hàm số  $S(x) = 2\pi x^2 + \frac{4}{x}, x > 0$

$$S'(x) = 4\pi x - \frac{4}{x^2}$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} \approx 0,6827$$

**Câu 106. (VD)** Khi sản xuất vỏ lon sữa bia hình trụ, các nhà sản xuất luôn đặt tiêu chí sao cho chi phí sản xuất vỏ lon là nhỏ nhất. Hỏi khi nhà sản xuất muốn thể tích của hộp sữa là  $V \text{ cm}^3$ , thì diện tích toàn phần của lon sữa nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } V = \pi r^2 h \Rightarrow h = l = \frac{V}{\pi r^2}.$$

Diện tích toàn phần của lon sữa:

$$S_{tp} = S_{xq} + S_{2d} = 2\pi r l + 2\pi r^2 = 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2.$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có } \frac{2V}{r} + 2\pi r^2 = \frac{V}{r} + \frac{V}{r} + 2\pi r^2 \geq 3\sqrt{\frac{V}{r} \cdot \frac{V}{r} \cdot 2\pi r^2} = 6\sqrt{\frac{\pi V^2}{4}}.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi: } \frac{V}{r} = 2\pi r^2 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

$$\text{Vậy diện tích toàn phần của lon sữa nhỏ nhất bằng } 6\sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{4}} \text{ khi } r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

**Câu 107. (VD)** Một đại lý xăng dầu cần xây một bồn chứa dầu hình trụ có đáy hình tròn bằng thép có thể tích  $49\pi (\text{m}^3)$  và giá mỗi mét vuông thép là 500 ngàn đồng. Hỏi giá tiền thấp nhất mà đại lý phải trả gần đúng với số tiền nào nhất.

**A.** 79,5 triệu**B.** 80,5 triệu**C.** 77,4 triệu**D.** 75 triệu**Lời giải**

Gọi bán kính đáy là  $x(m)$  ( $x > 0$ ), chiều cao bồn chứa là  $h(m)$ . Khi đó thể tích chứa của bồn là

$$V = \pi x^2 \cdot h = 49\pi \Leftrightarrow h = \frac{49}{x^2} (m)$$

Do là bồn chứa dầu nên phải có nắp nên diện tích cần xây của bồn chứa là:

$$2 \cdot \pi x^2 + 2\pi x \cdot h = 2\pi x^2 + \frac{98\pi}{x}.$$

Để chi phí xây dựng thấp nhất thì diện tích xây cũng phải thấp nhất.

Xét hàm số  $f(x) = 2\pi x^2 + \frac{98\pi}{x}$  ( $x > 0$ ) có giá trị nhỏ nhất gần bằng 159,005 ( $m^2$ )

**Câu 108. (VD)** Một cửa hàng nhận làm những chiếc xô bằng nhôm hình trụ không có nắp đủ chứa được 10 lít nước. Hỏi bán kính đáy (đơn vị cm, làm tròn đến hàng phần chục) của chiếc xô bằng bao nhiêu để cửa hàng tốn ít nguyên vật liệu nhất.

**A.** 14,7**B.** 15**C.** 15,2**D.** 14**Lời giải**

Gọi  $x$  ( $x > 0$ ) là bán kính của chiếc xô. Khi đó  $V = \pi x^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi x^2}$ .

Để tiết kiệm nguyên vật liệu thì diện tích toàn phần của chiếc xô phải bé nhất.

Ta có:  $10l = 10dm^3 = 10000cm^3$ .

Diện tích toàn phần của chiếc xô là:

$$S(x) = \pi x^2 + 2\pi x h = \pi x^2 + 2\pi x \frac{V}{\pi x^2} = \pi x^2 + 2 \frac{10000}{x} = \pi x^2 + \frac{20000}{x}$$

$$S'(x) = 2\pi x - \frac{20000}{x^2} = \frac{2\pi x^3 - 20000}{x^2}.$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\pi x^3 - 20000 = 0 \Leftrightarrow x^3 = \frac{10000}{\pi} \Leftrightarrow x = 10 \cdot \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$$

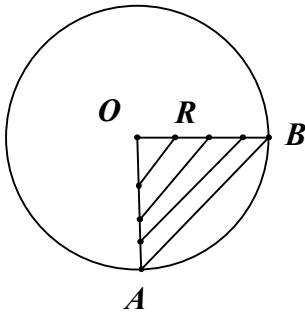
Bảng biến thiên:

| $x$     | 0 | $10 \cdot \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$ | $+\infty$ |
|---------|---|-------------------------------------|-----------|
| $S'(x)$ | - | 0                                   | +         |
| $S(x)$  |   | ↙ 2039,4 ↘                          |           |

Ta thấy diện tích toàn phần chiếc xô nhỏ nhất khi bán kính đáy xô là  $x = 10 \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}} \approx 14,7(\text{cm})$ .

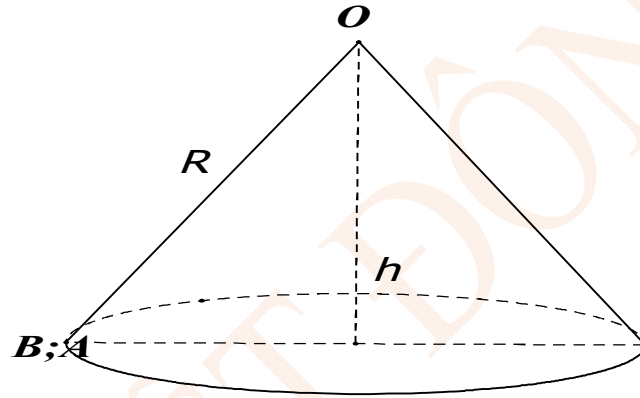
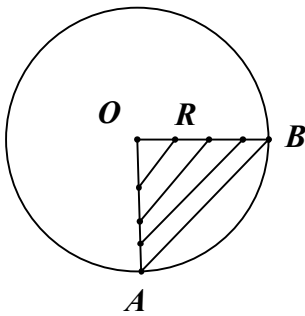
**Câu 109. (VD)** An có một tấm bìa hình tròn như hình vẽ có bán kính  $R = 12\text{cm}$ , An muốn tạo một cái phễu hình nón từ tấm bìa đó. Khi đó An phải cắt bỏ hình quạt tròn  $AOB$  rồi dán  $OA$ ,  $OB$  lại với nhau. Gọi  $x$  (Rad) là góc ở tâm của hình quạt tròn  $AOB$ . Tìm  $x$  để thể tích phễu lớn nhất.

Giá trị của  $x$  bằng (kết quả làm tròn đến 2 chữ số sau dấu phẩy).....



Đáp số:  $x = 1,15$

Lời giải



Gọi  $r$  là bán kính đường tròn đáy của hình nón, với  $r > 0$ .

Ta có diện tích xung quanh của hình phễu là  $S_{xq} = 12\pi r$  (1)

Diện tích hình quạt sau khi cắt bỏ hình quạt  $AOB$  là  $S = 144\pi - \frac{144x}{2}$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $x = 2\pi - \frac{\pi r}{6}$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2} = \frac{1}{3}\pi \sqrt{r^4 \cdot R^2 - r^6}$  là thể tích của phễu

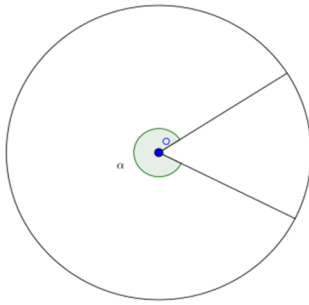
Xét hàm số phụ  $y = r^4 \cdot R^2 - r^6 \Rightarrow y' = 4r^3 \cdot R^2 - 6r^5$

$y' = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot R^2 - 3r^2 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{6}}{3} R$

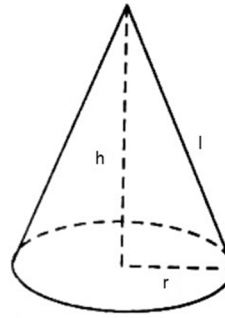
| $r$     | 0 | $\frac{R\sqrt{6}}{3}$                                                                | $R$ |   |
|---------|---|--------------------------------------------------------------------------------------|-----|---|
| $y'(r)$ |   | +                                                                                    | 0   | - |
| $y(r)$  |   |  |     |   |

Vậy  $y$  max thì  $V$  và  $V$  max khi  $r = \frac{R\sqrt{6}}{3} = 4\sqrt{6} \Leftrightarrow x = 2\pi - \frac{\pi r}{6} \Leftrightarrow x \approx 1,15$

**Câu 110. (VD)** Cho một tấm tôn hình tròn có diện tích  $4\pi \text{ dm}^2$ . Người ta cắt thành một hình quạt có góc ở tâm là  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 2\pi$ ) như Hình 1 để làm thành một cái gầu múc nước hình nón như Hình 2.



Hình 1



Hình 2

Thể tích lớn nhất của cái gầu là bao nhiêu?

**Lời giải**

**Đáp án:** Thể tích lớn nhất của cái gầu là  $\frac{16\sqrt{3}\pi}{27}(dm^3)$

Ta có: đường sinh  $l$  của hình nón là bán kính  $R = \frac{4\pi}{2\pi} = 2dm$  của hình tròn

Bán kính đáy của hình nón:  $r = \frac{2\alpha}{2\pi} = \frac{\alpha}{\pi}$

Đường cao của hình nón:  $h = \sqrt{2^2 - \frac{\alpha^2}{\pi^2}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$

Khi đó thể tích hình nón:  $V(\alpha) = \frac{1}{3} \pi \frac{\alpha^2}{\pi^2} \frac{1}{\pi} \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2} = \frac{1}{3\pi^2} \alpha^2 \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$

$$V'(\alpha) = \frac{1}{3\pi^2} \left( 2\alpha \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2} - \frac{\alpha^3}{\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}} \right) = \frac{1}{3\pi^2} \left( \frac{-3\alpha^2 + 8\pi^2}{\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}} \right)$$

$$V'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \notin (0; 2\pi) \\ \alpha = \frac{2\sqrt{6}\pi}{3} \\ \alpha = -\frac{2\sqrt{6}\pi}{3} \notin (0; 2\pi) \end{cases} \Rightarrow V = \frac{1}{3\pi^2} \times \frac{8}{3} \pi^2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi = \frac{16\sqrt{3}\pi}{27}(dm^3)$$

Bảng biến thiên:

|              |   |                                       |        |
|--------------|---|---------------------------------------|--------|
| $\alpha$     | 0 | $\frac{2\sqrt{6}\pi}{3}$              | $2\pi$ |
| $V'(\alpha)$ | + | 0                                     | -      |
| $V(\alpha)$  |   | $V_{\max} = \frac{16\sqrt{3}\pi}{27}$ |        |

**Câu 111. (VD)** Một kiến trúc sư môn thiết kế một mô hình kim tự tháp Ai Cập có dạng là một hình chóp tứ giác đều ngoại tiếp một mặt cầu có bán kính bằng 6 m. Để tiết kiệm nguyên liệu xây dựng thì kiến trúc sư đó phải thiết kế kim tự tháp sao cho có thể tích nhỏ nhất. Chiều cao của kim tự tháp đó là:

A. 12m.

B. 18m.

C. 36 m.

D. 24m.

**Câu 112. (VD)** Ông Bình muốn làm một cái phễu bằng tôn hình nón có thể tích bằng  $54\pi$ . Ông Bình muốn dùng tôn để làm phần mặt xung quanh của phễu. Hãy tìm bán kính đáy  $R$  của cái phễu để sao cho chi phí mua tôn là nhỏ nhất?

**Lời giải**

**Đáp số:**  $R = \sqrt[3]{13122} \approx 4,86$

Gọi  $h, l$  lần lượt là chiều cao và độ dài đường sinh của khối nón (với  $h, l > 0$ ).

$$\text{Ta có: } V = \frac{1}{3}\pi R^2 h \Leftrightarrow h = \frac{162}{R^2}$$

$$\text{Ta có } l = \sqrt{R^2 + h^2} \Leftrightarrow l = \sqrt{R^2 + \frac{26244}{R^4}}$$

$$S_{xq} = \pi \cdot R \cdot l = \pi R \sqrt{R^2 + \frac{26244}{R^4}} = \pi \sqrt{R^4 + \frac{26244}{R^2}}.$$

$$\text{Xét hàm số } g(R) = R^4 + \frac{26244}{R^2}$$

$$g'(R) = 4R^3 - \frac{52488}{R^3}, \quad g'(R) = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{13122}$$

Bảng biến thiên

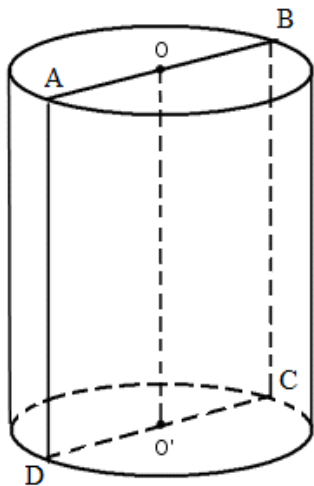
|         |                                                                                     |                   |           |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|-----------|
| $R$     | 0                                                                                   | $\sqrt[3]{13122}$ | $+\infty$ |
| $g'(R)$ | -                                                                                   | 0                 | +         |
| $g(R)$  |  |                   |           |

Dựa vào bảng biến thiên ta có  $S_{xp}$  nhỏ nhất khi  $R = \sqrt[3]{13122} \approx 4,86$

**Câu 113. (VD)** Thiết diện của hình trụ và mặt phẳng chứa trục của hình trụ là hình chữ nhật có chu vi bằng  $24\text{cm}$ . Tìm bán kính của khối trụ sao cho thể tích khối trụ là lớn nhất.

**Lời giải**

**Đáp số:**  $r = 4\text{cm}$



Từ hình vẽ ta có  $ABCD$  là hình chữ nhật, gọi chiều cao của hình trụ là  $h$  và bán kính đáy của hình trụ là  $r$  (với  $h, r > 0$ ).

$$\text{Theo giả thiết ta có } 2(h + 2r) = 24 \Leftrightarrow h + 2r = 12 \Leftrightarrow h = 12 - 2r.$$

$$\text{Thể tích của khối trụ là: } V = \pi r^2 h \Leftrightarrow V = \pi r^2 (12 - 2r) \Leftrightarrow V = 12\pi r^2 - 2\pi r^3$$

$$V' = 24\pi r - 6\pi r^2, V' = 0 \Leftrightarrow 24\pi r - 6\pi r^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = 4 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

|      |                                                                                    |   |           |
|------|------------------------------------------------------------------------------------|---|-----------|
| $r$  | 0                                                                                  | 4 | $+\infty$ |
| $V'$ | +                                                                                  | 0 | -         |
| $V$  |  |   |           |

Dựa vào bảng biến thiên ta có  $V_{\max}$  khi  $r = 4\text{cm}$ .

**Câu 114. (VD)** Một nhà sản xuất cần làm ra những chiếc bình có dạng hình trụ với dung tích  $1000\text{cm}^3$ . Mặt trên và mặt dưới của bình được làm bằng vật liệu có giá  $1,2$  nghìn đồng/ $\text{cm}^2$ , trong khi mặt bên của bình được làm bằng vật liệu có giá  $0,75$  nghìn đồng/ $\text{cm}^2$ . Tìm các kích thước của bình để chi phí vật liệu sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất.

### Lời giải

Gọi  $r, h$  lần lượt là bán kính hình tròn đáy và chiều cao của hình trụ ( $r, h > 0$ ).

$$\text{Khi đó: } V = \pi r^2 h = 1000 \Leftrightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

Diện tích mặt trên và mặt dưới của hình trụ là:  $2\pi r^2$  ( $\text{cm}^2$ )

Chi phí vật liệu sản xuất mặt trên và mặt dưới là:  $1,2 \cdot 2\pi r^2 = 2,4\pi r^2$  (nghìn đồng)

Diện tích mặt bên của bình hình trụ là  $2\pi rh$  ( $\text{cm}^2$ )

Chi phí vật liệu sản xuất mặt bên là  $0,75 \cdot 2\pi rh = 1,5\pi rh$  (nghìn đồng)

$$\text{Tổng chi phí: } 2,4\pi r^2 + 1,5\pi rh = 2,4\pi r^2 + \frac{1500}{r} \quad (r > 0)$$

$$\text{Xét hàm số: } y = 2,4\pi r^2 + \frac{1500}{r} \quad (r > 0)$$

$$\text{Ta có: } y' = 4,8\pi r - \frac{1500}{r^2} = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}} \quad (\text{tm})$$

Bảng biến thiên:

|      |           |                                            |           |
|------|-----------|--------------------------------------------|-----------|
| $r$  | 0         | $\sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}}$               | $+\infty$ |
| $y'$ |           | -                                          | 0         |
|      |           |                                            | +         |
| $y$  | $+\infty$ |                                            | $+\infty$ |
|      |           | $y\left(\sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}}\right)$ |           |

Dựa vào bảng biến thiên ta có chi phí nhỏ nhất khi bình có kích thước  $r = \sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}}\text{cm}$  và

$$h = \frac{1000}{\pi} \sqrt[3]{\frac{4\pi^2}{390625}} \text{ cm}.$$

**Câu 115. (VD)** Công ty A định làm một tép nước hình trụ bằng inox (gồm cả nắp) có dung tích  $2\text{m}^3$ . Để tiết kiệm chi phí công ty A chọn loại tép nước có diện tích toàn phần nhỏ nhất. Diện tích toàn phần của tép nước nhỏ nhất bằng (kết quả làm tròn đến 2 chữ số sau dấu phẩy).....?

### Lời giải

**Đáp số:** 8,79

Gọi  $R, h$  lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ (với  $R, h > 0$ ).

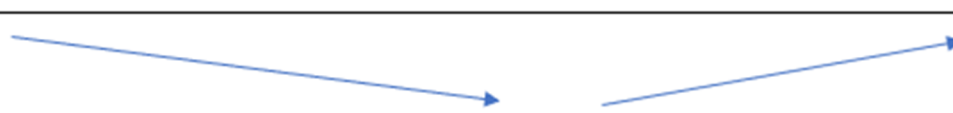
$$\text{Ta có: } V = \pi R^2 h = 2 \Rightarrow \begin{cases} \pi R h = \frac{2}{R} \\ \pi R^2 = \frac{2}{h} \end{cases}$$

$$\text{Diện tích toàn phần của téc nước: } S_{tp} = 2\pi R^2 + 2\pi R h = 2\pi R^2 + \frac{4}{R}$$

$$\text{Xét hàm số } f(R) = 2\pi R^2 + \frac{4}{R}$$

$$\text{Có } f'(R) = 4\pi R - \frac{4}{R^2} = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}.$$

Lập bảng biến thiên

|         |                                                                                    |                           |           |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|-----------|
| $R$     | 0                                                                                  | $\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$ | $+\infty$ |
| $f'(R)$ | -                                                                                  | 0                         | +         |
| $f(R)$  |  |                           |           |

ta có  $S_{tp}$  đạt giá trị nhỏ nhất tại  $R = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$

$$\Rightarrow S_{(tp)\min} = 2\sqrt[3]{\pi} + 4\sqrt[3]{\pi} \approx 8,79$$

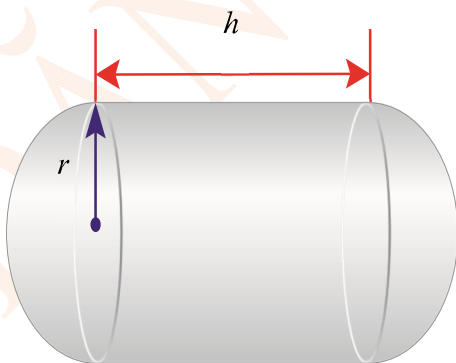
**Câu 116. (VD)** Một thùng chứa nhiên liệu gồm phần ở giữa là một hình trụ có chiều dài  $h$  mét ( $h > 0$ ) và hai đầu là các nửa hình cầu bán kính  $r$  ( $r > 0$ ) (Hình vẽ). Biết rằng thể tích của thùng chứa là  $144000\pi \text{ m}^3$ . Để sơn mặt ngoài của phần hình cầu cần 20000 đồng cho  $1 \text{ m}^2$ , còn sơn mặt ngoài cho phần hình trụ cần 10000 đồng cho  $1 \text{ m}^2$ . Để chi phí cho việc sơn diện tích mặt ngoài thùng chứa (bao gồm diện tích xung quanh hình trụ và diện tích hai nửa hình cầu) là nhỏ nhất thì  $r$  bằng bao nhiêu (biết rằng bán kính  $r$  không được vượt quá  $50 \text{ m}$ )?

A.  $r = 25$ .

B.  $r = 26,5$ .

C.  $r = 27,8$ .

D.  $r = 37,8$ .



**Lời giải**

Thể tích của thùng nước là

$$V = 2 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 + \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{8}{3} \pi \cdot r^3 + \pi \cdot r^2 \cdot h = 144000\pi \text{ (m}^3\text{)} (0 < r \leq 50)$$

$$\Rightarrow h = \frac{144000\pi - \frac{8}{3}\pi \cdot r^3}{\pi \cdot r^2} = \frac{144000}{r^2} - \frac{8}{3}r$$

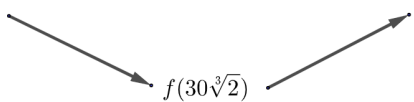
Chi phí sơn bề mặt bên ngoài thùng nước là:

$$f(r) = 4\pi \cdot r^2 \cdot 20000 + 2\pi \cdot r \cdot h \cdot 10000 = 4\pi \cdot r^2 \cdot 20000 + 20000\pi \cdot r \cdot \left( \frac{144000}{r^2} - \frac{8}{3}r \right)$$

$$f(r) = 80000\pi \cdot r^2 + \frac{2880000000}{r}\pi - \frac{160000}{3}\pi \cdot r^2 = \frac{80000}{3}\pi \cdot r^2 + \frac{2880000000}{r}\pi$$

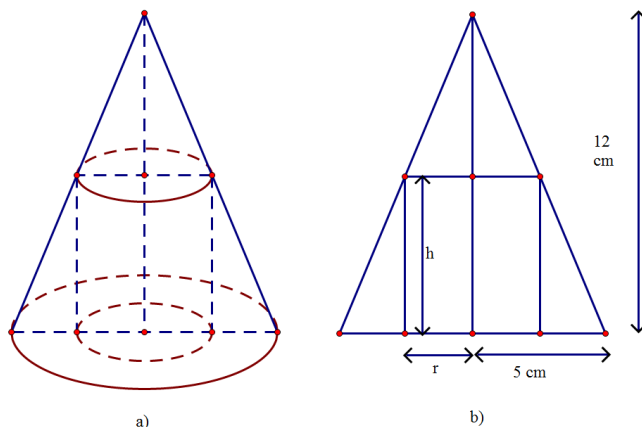
$$\text{Ta có: } f'(r) = \frac{160000}{3}\pi \cdot r - \frac{2880000000}{r^2}\pi = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{54000} = 30\sqrt[3]{2}$$

Bảng biến thiên:

|         |                                                                                    |                 |    |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|----|
| r       | 0                                                                                  | $30\sqrt[3]{2}$ | 50 |
| $f'(r)$ | 0                                                                                  | -               | 0  |
| $f(r)$  |  |                 |    |

Vậy để chi phí cho việc sơn diện tích mặt ngoài thùng chứa nhỏ nhất khi  $r = 30\sqrt[3]{2} \approx 37,8$ (m)

**Câu 117. (VD)** Cho một hình trụ nội tiếp trong hình nón có chiều cao bằng 12 cm và bán kính đáy bằng 5 cm (Hình a). Người ta cắt hình nón, trụ này theo mặt phẳng chứa đường thẳng nối đỉnh và tâm hình tròn đáy của hình nón thì thu được một hình phẳng như Hình b)



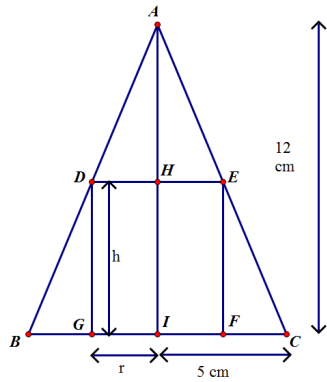
a) Chứng minh rằng công thức tính bán kính  $r$  của đáy hình trụ theo chiều cao  $h$  của nó là:

$$r = \frac{5(12-h)}{12}.$$

b) Chứng minh biểu thức sau biểu thị thể tích khối trụ theo  $h$ :  $V(h) = \frac{25\pi h(12-h)^2}{144}.$

c) Tìm  $h$  để khối trụ có thể tích lớn nhất.

**Lời giải**



(a) Đặt tên các điểm trên hình vẽ.

Ta có  $\triangle AHE \sim \triangle AIC (g.g) \Rightarrow \frac{AH}{AI} = \frac{HE}{IC}$ .  
 $\Rightarrow \frac{12-h}{12} = \frac{r}{5} \Rightarrow r = \frac{5(12-h)}{12}$ .

(b) Diện tích đáy hình trụ là  $S = \pi r^2 = \pi \cdot \frac{25(12-h)^2}{144}$ .

Thể tích khối trụ theo  $h$  là:  $V = \pi r^2 h = \frac{25\pi h(12-h)^2}{144}$ .

(c) Xét hàm số  $V = \frac{25\pi h(12-h)^2}{144}$  với  $h \in [0; 12]$  ta có:

$$V' = \frac{25\pi(12-h)(12-3h)}{144} = \frac{25\pi}{48}h^2 - \frac{25\pi}{3}h + 25\pi.$$

$$V' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h = 4 \\ h = 12 \end{cases}.$$

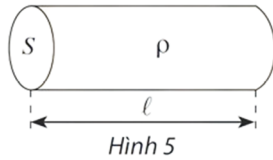
Ta có bảng biến thiên sau:

|    |   |                    |    |   |   |
|----|---|--------------------|----|---|---|
| h  | 0 | 4                  | 12 |   |   |
| V' |   | +                  | 0  | - | 0 |
| V  | 0 | $\frac{400\pi}{9}$ |    | 0 |   |

Qua bảng biến thiên ta kết luận để khối trụ có thể tích lớn nhất  $V_{\max} = \frac{400\pi}{9} (cm^3)$  thì  $h = 4cm$ .

**Câu 118. (VD)** Điện trở  $R(\Omega)$  của một đoạn dây dẫn hình trụ được làm từ vật liệu có điện trở suất  $\rho(\Omega m)$ , chiều dài  $\ell(m)$  và tiết diện  $S(m^2)$  được cho bởi công thức

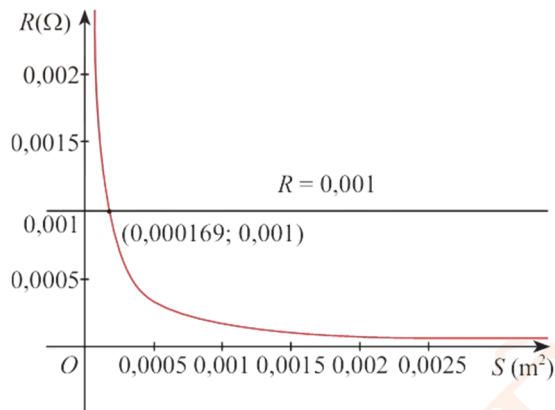
$$R = \rho \cdot \frac{\ell}{S}$$



Hình 5

(Vật lí 11 – Chân trời sáng tạo, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2023, trang 104)

Giả sử người ta khảo sát sự biến thiên của điện trở  $R$  theo tiết diện  $S$  (ở nhiệt độ  $20^0 C$ ) của một sợi dây điện dài  $10m$  làm từ kim loại có điện trở suất  $\rho$  và thu được đồ thị hàm số như Hình 6.



Hình 6

- Có nhận xét gì về sự biến thiên của điện trở  $R$  theo tiết diện  $S$ ?
- Từ đồ thị, hãy giải thích ý nghĩa của tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số với đường thẳng  $R = 0,001$ .
- Tính điện trở suất  $\rho$  của dây điện. Từ đó, hãy cho biết dây điện được làm từ kim loại nào trong số các kim loại được cho ở bảng sau:

| Kim loại | Điện trở suất ở $20^0 C$ ( $\Omega m$ ) |
|----------|-----------------------------------------|
| Bạc      | $1,62 \cdot 10^{-8}$                    |
| Đồng     | $1,69 \cdot 10^{-8}$                    |
| Vàng     | $2,44 \cdot 10^{-8}$                    |
| Nhôm     | $2,75 \cdot 10^{-8}$                    |
| Sắt      | $9,68 \cdot 10^{-8}$                    |

### Lời giải

- Dựa vào Đồ thị hàm số ở Hình 6, ta dễ dàng thấy được giá trị của điện trở  $R$  và tiết diện  $S$  là tỉ lệ nghịch.
- Với tiết diện của đoạn dây  $S = 0,000169 m^2$  thì điện trở của đoạn dây  $R = 0,001(\Omega)$ .
- Với tiết diện của đoạn dây  $S = 0,000169 m^2$  thì điện trở của đoạn dây  $R = 0,001(\Omega)$ , ta có:

$$R = \rho \cdot \frac{\ell}{S} \Rightarrow \rho = \frac{R \cdot S}{\ell} = \frac{0,001 \cdot 0,000169}{10} = 1,69 \cdot 10^{-8} (\Omega m).$$

Vậy sợi dây điện được làm bằng đồng.

#### Loại 4: Thiết lập hàm liên quan đến bài toán kinh tế.

**Câu 119. (VD)** Một công ty sản xuất một sản phẩm. Bộ phận tài chính của công ty đưa ra hàm giá bán là  $p(x) = 1000 - 25x$ , trong đó  $p(x)$  (triệu đồng) là giá bán của mỗi sản phẩm mà tại giá bán này có  $x$  sản phẩm được bán ra.

a) Hàm doanh thu của công ty là  $f(x) = x \cdot p(x)$ .

b) Hàm số  $f(x) = -25x^2 + 1000x$  có đạo hàm  $f'(x) = -50x + 1000$ .

c) Nếu  $f(x) = x \cdot p(x)$  là hàm doanh thu thì phương trình  $f'(x) = 0$  có nghiệm là  $x = 2$ .

d) Hàm doanh thu đạt giá trị lớn nhất bằng 10000.

#### Lời giải

| Ý       | a) | b) | c) | d) |
|---------|----|----|----|----|
| Kết quả | Đ  | Đ  | S  | Đ  |

a) Ta có doanh thu của công ty bằng giá bán của mỗi sản phẩm nhân với số sản phẩm được bán ra. Suy ra hàm doanh thu của công ty là  $f(x) = x \cdot p(x)$ . **Suy ra (a) đúng.**

(b) Ta có  $f(x) = x \cdot p(x) = x(1000 - 25x) = -25x^2 + 1000x$ .

Suy ra đạo hàm  $f'(x) = -50x + 1000$ . **Suy ra (b) đúng.**

(c)  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -50x + 1000 = 0 \Leftrightarrow x = 20$

Vậy  $f'(x) = 0$  có nghiệm là  $x = 20$ . **Suy ra (c) sai.**

(d) Lập BBT của hàm số  $f(x) = -25x^2 + 1000x$  ta có  $f(x) = -25x^2 + 1000x$  đạt giá trị lớn nhất là 10000 tại  $x = 20$ .

Vậy doanh thu đạt giá trị lớn nhất bằng 10000 triệu đồng, khi đó có 20 sản phẩm được bán ra. **Suy ra (d) đúng.**

**Câu 120. (VD)** Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhuận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18000.

a) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì mỗi chiếc khăn cần tăng thêm 10000 đồng

b) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì mỗi chiếc khăn cần bán với giá 39000 đồng

c) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì sau khi tăng giá mỗi chiếc khăn lãi 21000 đồng

d) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì số khăn bán ra giảm 800 chiếc

#### Lời giải

(a) Sai

(b) Đúng

(c) Đúng

(d) Sai.

Gọi số tiền cần tăng giá mỗi chiếc khăn là  $x$  (nghìn đồng).

Vì cứ tăng giá thêm 1 (nghìn đồng) thì số khăn bán ra giảm 100 chiếc nên tăng  $x$  (nghìn đồng) thì số xe khăn bán ra giảm  $100x$  chiếc.

Do đó tổng số khăn bán ra mỗi tháng là:  $3000 - 100x$  chiếc.

Lúc đầu bán với giá 30 (nghìn đồng), mỗi chiếc khăn có lãi 12 (nghìn đồng). Sau khi tăng giá, mỗi chiếc khăn thu được số lãi là:  $12 + x$  (nghìn đồng).

Do đó tổng số lợi nhuận một tháng thu được sau khi tăng giá là:

$$f(x) = (3000 - 100x)(12 + x) \text{ (nghìn đồng)}.$$

Xét hàm số  $f(x) = (3000 - 100x)(12 + x)$  trên  $(0; +\infty)$ .

$$\text{Ta có: } f(x) = -100x^2 + 1800x + 36000.$$

$$f'(x) = -200x + 1800$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -200x + 1800 = 0 \Leftrightarrow x = 9$$

Lập bảng biến thiên của hàm số  $f(x)$  trên  $(0; +\infty)$  ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất khi  $x = 9$

Như vậy, để thu được lợi nhuận cao nhất thì cơ sở sản xuất cần tăng giá bán mỗi chiếc khăn là 9000 đồng, tức là mỗi chiếc khăn bán với giá mới là 39000 đồng.

**Câu 121. (VD)** Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30.000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhuận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18.000. Hỏi cơ sở sản xuất phải bán với giá mới là bao nhiêu để đạt lợi nhuận lớn nhất.

- A. 42.000 đồng.      B. 40.000 đồng.      C. 43.000 đồng.      D. 39.000 đồng.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Gọi số tiền cần tăng giá mỗi chiếc khăn là  $x$  (nghìn đồng).

Vì cứ tăng giá thêm 1 (nghìn đồng) thì số khăn bán ra giảm 100 chiếc nên tăng  $x$  (nghìn đồng) thì số xe khăn bán ra giảm  $100x$  chiếc. Do đó tổng số khăn bán ra mỗi tháng là:  $3000 - 100x$  chiếc.

Lúc đầu bán với giá 30 (nghìn đồng), mỗi chiếc khăn có lãi 12 (nghìn đồng). Sau khi tăng giá, mỗi chiếc khăn thu được số lãi là:  $12 + x$  (nghìn đồng). Do đó tổng số lợi nhuận một tháng thu được sau khi tăng giá là:  $f(x) = (3000 - 100x)(12 + x)$  (nghìn đồng).

Xét hàm số  $f(x) = (3000 - 100x)(12 + x)$  trên  $(0; +\infty)$ .

$$\text{Ta có: } f(x) = -100x^2 + 1800x + 36000 = -100(x - 9)^2 + 44100 \leq 44100.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $x = 9$ .

Như vậy, để thu được lợi nhuận cao nhất thì cơ sở sản xuất cần tăng giá bán mỗi chiếc khăn là 9.000 đồng, tức là mỗi chiếc khăn bán với giá mới là 39.000 đồng.

**Câu 122. (VD)** Một cửa hàng bán lẻ bán 2500 cái ti vi mỗi năm. Chi phí gửi trong kho là 10\$ một cái mỗi năm. Để đặt hàng chi phí cố định cho mỗi lần đặt là 20\$ cộng thêm 9\$ mỗi cái. Cửa hàng nên đặt hàng bao nhiêu lần trong mỗi năm và mỗi lần bao nhiêu cái để chi phí hàng tồn kho là nhỏ nhất ?

- A. Đặt hàng 25 lần, mỗi lần 100 cái ti vi.
- B. Đặt hàng 20 lần, mỗi lần 100 cái ti vi.
- C. Đặt hàng 25 lần, mỗi lần 90 cái ti vi.
- D. Đặt hàng 20 lần, mỗi lần 90 cái ti vi.

**Lời giải**

**Đáp án A**

Gọi  $x$  là số ti vi mà cửa hàng đặt mỗi lần ( $x \in [1; 2500]$ , đơn vị cái)

Số lượng ti vi trung bình gửi trong kho là  $\frac{x}{2}$  nên chi phí lưu kho tương ứng là  $10 \cdot \frac{x}{2} = 5x$

Số lần đặt hàng mỗi năm là  $\frac{2500}{x}$  và chi phí đặt hàng là:  $\frac{2500}{x}(20 + 9x)$

Khi đó chi phí mà cửa hàng phải trả là:  $C(x) = \frac{2500}{x}(20 + 9x) + 5x = 5x + \frac{50000}{x} + 22500$

Lập bảng biến thiên ta được:  $C_{\min} = C(100) = 23500$

Kết luận: đặt hàng 25 lần, mỗi lần 100 cái tivi.

**Câu 123. (VD)** Một nhà sản xuất trung bình bán được 1000 ti vi màn hình phẳng mỗi tuần với giá 14 triệu đồng một chiếc. Một cuộc khảo sát thị trường chỉ ra rằng nếu cứ giảm giá bán 500 nghìn đồng, số lượng ti vi bán ra sẽ tăng thêm khoảng 100 ti vi mỗi tuần.

a) Gọi  $p$  (triệu đồng) là giá của mỗi ti vi,  $x$  là số ti vi. Vậy hàm cầu là:  $p(x) = -\frac{1}{200}x + 19$

b) Công ty giảm giá 4,5 (triệu đồng)/1 tivi cho người mua thì doanh thu của công ty là lớn nhất

c) Nếu hàm chi phí hằng tuần là  $C(x) = 12000 - 3x$  (triệu đồng), trong đó  $x$  là số ti vi bán ra trong tuần, vậy có 2300 ti vi được bán ra thì lợi nhuận là cao nhất.

d) Nếu hàm chi phí hằng tuần là  $C(x) = 12000 - 3x$  (triệu đồng), trong đó  $x$  là số ti vi bán ra trong tuần, nhà sản xuất nên đặt giá bán 8,5 triệu đồng/1 ti vi để lợi nhuận là lớn nhất

**Câu 124. (VD)** Một cửa hàng bán bưởi Đoàn Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 40 quả bưởi. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 5000 đồng thì số bưởi bán được tăng thêm là 50 quả. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi quả là 30.000 đồng.

- A. 44.000 d
- B. 43.000 d
- C. 42.000 d
- D. 41.000 d

**Câu 125. (VD)** Một công ty bất động sản có 150 căn hộ cho thuê, biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng mỗi tháng thì mỗi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 5 căn hộ bị bỏ trống. Mệnh đề nào sau đây đúng

- a) Khi giá cho thuê mỗi căn hộ là 2.200.000 đồng thì có 10 căn hộ bị trống
- b) Khi giá cho thuê mỗi căn hộ là 2.700.000 đồng thì thu nhập của công ty cao nhất.
- c) Thu nhập cao nhất của công ty đạt được là 312.500.000 đồng.
- d) Khi thu nhập công ty cao nhất thì số căn hộ có người thuê là 125 căn hộ.

**Lời giải**

(a) Đúng; (b) Sai; (c) Đúng; (d) Đúng

Gọi số lần tăng giá tiền cho thuê mỗi căn hộ một tháng để công ty thu được thu nhập cao nhất là  $x$  (lần) ( $0 \leq x \leq 30$ )

Số tiền cho thuê mỗi căn hộ là  $2 + 0,1x$  (triệu đồng)

Số căn hộ mỗi tháng được thuê là  $150 - 5x$  (căn hộ)

Thu nhập của công ty đạt được là  $(2 + 0,1x)(150 - 5x)$

Đặt  $f(x) = (2 + 0,1x)(150 - 5x)$

$f'(x) = 0,1 \cdot (150 - 5x) - 5(2 + 0,1x) = 15 - 0,5x - 10 - 0,5x = 5 - x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$

$f(0) = 300; f(5) = 312,5; f(30) = 0 \Rightarrow \underset{x \in [0;30]}{Max} f(x) = f(5) = 312,5$  khi  $x = 5$

Vậy để có thu nhập cao nhất thì công ty đó phải cho thuê với giá  $2 + 0,1 \cdot 5 = 2,5$  (triệu đồng).

**Câu 126. (VD)** Một công ty kinh doanh bất động sản có 20 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng/1 tháng thì tất cả các căn hộ đều có người thuê. Nhưng cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 200 nghìn đồng/1 tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Hỏi công ty nên cho thuê mỗi căn hộ bao nhiêu tiền một tháng để tổng số tiền thu được là lớn nhất?

### Lời giải

Cứ tăng thêm 200 nghìn đồng vào giá thuê một căn hộ trên một tháng thì có một căn hộ bị bỏ trống.

Gọi số lần tăng 200 nghìn đồng vào giá thuê một căn hộ trên một tháng là  $x$  ( $x \in \mathbb{N}^*$ ).

Khi đó  $x$  cũng là số căn hộ bị bỏ trống.

Tổng số tiền công ty thu được lúc này là

$T(x) = (2000 + 200x)(20 - x) = 40000 + 2000x - 200x^2$  (nghìn đồng).

Xét hàm số  $T(x) = 40000 + 2000x - 200x^2$  với  $x \in \mathbb{N}^*$ .

Ta có  $T'(x) = 2000 - 400x$ ;

$T'(x) = 0 \Leftrightarrow 2000 - 400x = 0 \Leftrightarrow x = 5$  (thỏa mãn).

Bảng biến thiên của hàm số  $T(x)$  như sau:

| $x$     | 0      | 5      | $+\infty$ |
|---------|--------|--------|-----------|
| $T'(x)$ |        | 0      | -         |
| $T(x)$  | 40 000 | 45 000 | $-\infty$ |

Căn cứ vào bảng biến thiên trên, ta thấy hàm số  $T(x)$  đạt giá trị lớn nhất bằng 45000 khi  $x = 5$ .

Khi đó, số tiền tăng lên khi cho thuê một căn hộ là  $200 \cdot 5 = 1000$  nghìn đồng = 1 triệu đồng.

Vậy công ty nên cho thuê mỗi căn hộ 3 triệu đồng/1 tháng thì tổng số tiền thu được là lớn nhất.

**Câu 127. (VD)** Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thể 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu?

A. 2.250.000.

B. 2.350.000.

C. 2.450.000.

D. 2.550.000.

### Lời giải

**Đáp án A**

Gọi  $x$  là giá cho thuê thực tế của mỗi căn hộ, ( $x$  – đồng;  $x \geq 2000.000$  đồng).

Số căn hộ cho thuê được ứng với giá cho thuê:

$$50 - \frac{1}{50000}(x - 2000000) = -\frac{1}{50.000}x + 90, (1)$$

Gọi  $F(x)$  là hàm lợi nhuận thu được khi cho thuê các căn hộ, ( $F(x)$ : đồng).

$$\text{Ta có } F(x) = \left(-\frac{1}{50.000}x + 90\right)x = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90x$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của  $F(x) = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90x$  với điều kiện  $x \geq 2000.000$

$$F'(x) = -\frac{1}{25.000}x + 90$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{25.000}x + 90 = 0 \Leftrightarrow x = 2.250.000$$

Ta lập bảng biến thiên:

|         |                                                                                              |           |           |
|---------|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|-----------|
| x       | 2000.000                                                                                     | 2.250.000 | $+\infty$ |
| $F'(x)$ | +                                                                                            | 0         | -         |
| $F(x)$  | $F_{max}$  |           |           |

Suy ra  $F(x)$  đạt giá trị lớn nhất khi  $x = 2.250.000$

Vậy công ty phải cho thuê với giá 2.250.000 đồng mỗi căn hộ thì được lãi lớn nhất.

**Nhận xét:** Làm sao ta có thể tìm được hệ số  $\frac{1}{50000}$  trong biểu thức (1) ?

Ta có thể hiểu đơn giản như sau: Số căn hộ cho thuê mỗi tháng ứng với số tiền cho thuê;  $50 - m(x - 2000.000)x = 2.000.000$  thì số căn hộ được thuê là 50. Nếu số tiền cho thuê tăng lên là  $x = 2.100.000$  thì có 2 căn hộ để trống, nghĩa là có 48 người thuê. Ta có:

$$50 - m(2.100.000 - 2.000.000) = 48 \Leftrightarrow m = \frac{1}{50000}.$$

**Câu 128. (VD)** Một khách sạn có 50 phòng. Hiện tại mỗi phòng cho thuê với giá 400 ngàn đồng một ngày thì toàn bộ phòng được thuê hết. Biết rằng cứ mỗi lần tăng giá thêm 20 ngàn đồng thì có thêm 2 phòng trống. Giám đốc phải chọn giá phòng mới là bao nhiêu để thu nhập của khách sạn trong ngày là lớn nhất.

A. 480 ngàn.

B. 50 ngàn.

C. 450 ngàn.

D. 80 ngàn.

**Lời giải**

Gọi  $x$  (ngàn đồng) là giá phòng khách sạn cần đặt ra,  $x > 400$  (đơn vị: ngàn đồng).

Giá chênh lệch sau khi tăng  $x - 400$ .

$$\text{Số phòng cho thuê giảm nếu giá là } x: \frac{(x - 400) + 2}{20} = \frac{x - 400}{10}.$$

$$\text{Số phòng cho thuê với giá } x \text{ là } 50 - \frac{x - 400}{10} = 90 - \frac{x}{10}.$$

$$\text{Tổng doanh thu trong ngày là: } f(x) = x \left(90 - \frac{x}{10}\right) = -\frac{x^2}{10} + 90x.$$

$$f'(x) = -\frac{x}{5} + 90. \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 450.$$

Bảng biến thiên:

|         |                                                                                   |     |           |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|-----------|
| $x$     | 400                                                                               | 450 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +                                                                                 | 0   | -         |
| $f(x)$  |  |     |           |

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy  $f(x)$  đạt giá trị lớn nhất khi  $x = 450$ .

Vậy nếu cho thuê với giá 450 ngàn đồng thì sẽ có doanh thu cao nhất trong ngày là 2.025.000 đồng.

**Phương pháp trắc nghiệm:** Sử dụng chức năng TABLE lập bảng giá trị của hàm số

$$F(X) = -\frac{X^2}{10} + 90X \text{ trên đoạn } [400; 600] \text{ và quan sát để tìm giá trị lớn nhất của } F(X).$$

**Câu 129. (VD)** Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 000 000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 50 000 đồng một tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Công ty đã tìm ra phương án cho thuê đạt lợi nhuận lớn nhất. Hỏi thu nhập cao nhất công ty có thể đạt được trong 1 tháng là bao nhiêu?

- A. 115 250 000.      B. 101 250 000.      C. 100 000 000.      D. 100 250 000.

**Lời giải**

**Chọn B**

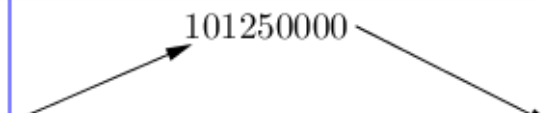
Gọi  $x$  (đồng/tháng) ( $x > 0$ ) là giá cho thuê mới.

$$\Rightarrow \text{Số căn hộ bị bỏ trống là } \frac{x}{50\,000} \text{ căn hộ}$$

$$\Rightarrow \text{Số tiền công ty thuê được } T(x) = (2\,000\,000 + x) \left( 50 - \frac{x}{50\,000} \right)$$

Khảo sát hàm số  $T(x)$  trên  $(0; +\infty)$

$$\Rightarrow T'(x) = 10 - \frac{x}{25\,000} \Rightarrow T'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 250\,000.$$

|         |                                                                                      |        |           |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------|--------|-----------|
| $x$     | 0                                                                                    | 250000 | $+\infty$ |
| $T'(x)$ | +                                                                                    | 0      | -         |
| $T(x)$  |  |        |           |

Bảng biến thiên

Vậy thu nhập cao nhất công ty có thể đạt được trong 1 tháng là:  $T = 101\,250\,000$ .

**Câu 130. (VD)** Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê

mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu?

A. 2.250.000

B. 2.350.000

C. 2.450.000

D. 2.550.000

**Câu 131. (VD)** Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe hơn đa Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 và bán ra với giá là 31 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm là sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất.

### Lời giải

• Gọi  $x$  đồng là số tiền mà doanh nghiệp A dự định giảm giá; ( $0 \leq x \leq 4$ ).

Khi đó:

• Lợi nhuận thu được khi bán một chiếc xe là  $31 - x - 27 = 4 - x$ .

• Số xe mà doanh nghiệp sẽ bán được trong một năm là  $600 + 200x$ .

• Lợi nhuận mà doanh nghiệp thu được trong một năm là:

$$f(x) = (4 - x)(600 + 200x) = -200x^2 + 200x + 2400.$$

• Xét hàm số  $f(x) = -200x^2 + 200x + 2400$  trên đoạn  $[0; 4]$

• TXĐ:  $D = \mathbb{R}$

• Định  $I\left(\frac{1}{2}; 2450\right)$

• BBT:

|        |           |      |               |   |           |
|--------|-----------|------|---------------|---|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | 0    | $\frac{1}{2}$ | 4 | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | 2400 | 2450          | 0 | $-\infty$ |

• Vậy  $\max_{[0; 4]} f(x) = 2450 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ .

Tức là khi giảm giá mỗi xe đi 0,5 triệu đồng thì số xe bán ra được nhiều nhất. Vậy giá mới của chiếc xe là 30,5 triệu đồng thì lợi nhuận thu được là cao nhất.

**Câu 132. (VD)** Một rạp chiếu phim có sức chứa 1000 người. Với giá vé là 40000 đồng, trung bình sẽ có khoảng 300 người đến rạp xem phim mỗi ngày. Để tăng số lượng vé bán ra, rạp chiếu phim đã khảo sát thị trường và thấy rằng nếu giá vé cứ giảm 10000 đồng thì sẽ có thêm 100 người đến rạp mỗi ngày.

a) Tìm công thức của hàm số  $R(x)$  mô tả doanh thu từ tiền bán vé mỗi ngày của rạp chiếu phim khi giá vé là  $x$  nghìn đồng.

b) Tìm mức giá vé để doanh thu từ tiền bán vé mỗi ngày của rạp là lớn nhất.

### Lời giải

(a) Khi giá vé là  $x$  (nghìn đồng) thì số tiền giảm giá mỗi vé so với mức giá cũ là  $40 - x$  (nghìn đồng).

Số người tăng lên sau khi giảm giá vé là:  $\frac{100(40 - x)}{10} = 10(40 - x)$ .

Số người đến rạp chiếu phim mỗi ngày sau khi giảm giá là:  $300 + 10(40 - x) = 700 - 10x$ .

Công thức của hàm số  $R(x)$  mô tả doanh thu từ tiền bán vé mỗi ngày khi giá vé là  $x$  (nghìn đồng) là:  $R(x) = x(700 - 10x) = -10x^2 + 700x$  (nghìn đồng).

**(b)** Hàm số  $R(x) = -10x^2 + 700x$  đạt giá trị lớn nhất tại  $x = 35$ . Khi đó  $R(35) = 12250$ .

Vậy doanh thu lớn nhất mà rạp chiếu có thể thu được mỗi ngày là 12250000 đồng khi giá bán mỗi vé là 35000 đồng.

**Câu 133. (VD)** Giám đốc một nhà hát A đang phân vân trong việc xác định mức giá vé xem các chương trình được trình chiếu trong nhà hát. Việc này rất quan trọng nó sẽ quyết định nhà hát thu được bao nhiêu lợi nhuận từ các buổi trình chiếu. Theo những cuốn sổ ghi chép của mình, ông ta xác định được rằng: nếu giá vé vào cửa là 20 USD/người thì trung bình có 1000 người đến xem. Nhưng nếu tăng thêm 1 USD/người thì sẽ mất 100 khách hàng hoặc giảm đi 1 USD/người thì sẽ có thêm 100 khách hàng trong số trung bình. Biết rằng, trung bình, mỗi khách hàng còn đem lại 2 USD lợi nhuận cho nhà hát trong các dịch vụ đi kèm. Hãy giúp giám đốc nhà hát này xác định xem cần tính giá vé vào cửa là bao nhiêu để thu nhập là lớn nhất.

## Lời giải

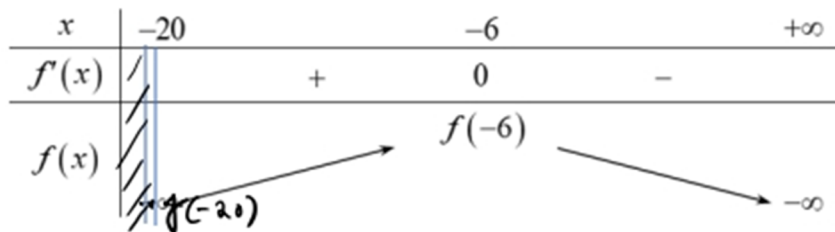
Gọi giá vé sau khi điều chỉnh là  $20+x$  (ĐK:  $x > -20$ )

Số khách là:  $1000 - 100x$

Tổng thu nhập

$$f(x) = (20 + x + 2)(1000 - 100x) = (22 + x)(1000 - 100x) = -100x^2 - 1200x + 22000$$

### Bảng biến thiên



$\max_{(-20; +\infty)} f(x) = f(-6)$ . Suy ra giá vé là:  $x + 20 = 20 - 6 = 14$  USD

**Câu 134. (VD)** Công ty du lịch Saigon Tourist báo giá tiền chuyến đi tham quan Đà Lạt cho nhóm khách của Trường THPT Trường Trinh như sau:

+ Nếu có dưới 40 khách thì giá vé là 500 000 đồng/ 1 người.

+ Nếu có nhiều hơn 40 khách thì cứ thêm một người giá vé sẽ giảm 10.000 đồng/ 1 người cho toàn bộ hành khách.

**a)** Gọi  $x$  là số lượng khách từ người thứ 41 trở đi. Hãy biểu thị doanh thu của công ty theo  $x$ .

**b) Số người của nhóm du lịch nhiều nhất là bao nhiêu để công ty không bị lỗ, biết chi phí của chuyến đi là 20.160.000 đồng?**

□ **Lời giải**

(a) Khi thêm  $x$  người thì giá vé thực tế là:  $500.000 - 10.000x$  (đồng)

$\Rightarrow$  Doanh thu mà công ty thu được là:  $T = (x + 40)(500.000 - 10.000x)$  (đồng)

**(b)** Để công ty không bị lỗ thì:  $T = (x + 40)(500.000 - 10.000x) \geq 20.160.000$

$$\Leftrightarrow (x+40)(50-x) \geq 2016 \Leftrightarrow -x^2 + 10x - 16 \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 8.$$

Vậy số lượng khách nhiều nhất là 48 người thì công ty không bị lỗ.

- Câu 135. (VD)** Một cửa hàng buôn giày nhập một đôi giày với giá 40 (nghìn đồng). Cửa hàng ước tính rằng nếu đôi giày được bán với giá  $x$  (nghìn đồng) thì mỗi tháng khách hàng sẽ mua  $(120 - x)$  đôi. Hỏi cửa hàng bán một đôi giày với giá trong khoảng bao nhiêu thì tháng đó cửa hàng có lợi nhuận nhiều hơn 1.200.000 đồng?

□ **Lời giải**

Gọi  $y$  là số tiền lãi của cửa hàng bán giày (nghìn đồng)

Số tiền lãi của cửa hàng trong một tháng là:

$$y = (120 - x)(x - 40) = -x^2 + 160x - 4800$$

Để cửa hàng có lợi nhuận nhiều hơn 1 200 (nghìn đồng) trong tháng đó thì  $y > 1200 \Leftrightarrow -x^2 + 160x - 4800 > 1200 \Leftrightarrow 60 < x < 100$

Vậy cần bán một đôi giày với giá từ 60 nghìn đồng đến 100 nghìn đồng.

- Câu 136. (VD)** Công ti truyền hình cáp Vista hiện có 100000 thuê bao. Mỗi thuê bao đang trả cước thuê bao 40\$/ tháng. Một cuộc khảo sát cho thấy cứ mỗi lần giảm 0,25\$ cước thuê bao, công ti có thể có thêm 1000 thuê bao. Để doanh thu thu được là tối đa, công ti cần xác định mức cước thuê bao mỗi tháng là bao nhiêu?

- Câu 137. (VD)** Người quản lý của một khu chung cư có 100 căn hộ cho thuê nhận thấy rằng tất cả các căn hộ sẽ có người thuê nếu giá thuê một căn hộ là 8 triệu đồng một tháng. Một cuộc khảo sát thị trường cho thấy rằng, trung bình cứ mỗi lần tăng giá thuê căn hộ thêm 100 nghìn đồng thì sẽ có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Người quản lý nên đặt giá thuê mỗi căn hộ là bao nhiêu để doanh thu là lớn nhất?

- Câu 138. (VD)** Một doanh nghiệp bán xe gắn máy trong đó có loại xe A bán ế nhất với giá mua vào mỗi chiếc xe là 26 triệu VNĐ và bán ra 30 triệu VNĐ, với giá bán này thì số lượng bán một năm là 600 chiếc. Cửa hàng cần đẩy mạnh việc bán được loại xe này nên đã đưa ra chiến lược kinh doanh giảm giá bán và theo tính toán của CEO nếu giảm 1 triệu VNĐ mỗi chiếc thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi cửa hàng định giá bán loại xe đó bao nhiêu thì doanh thu loại xe đó của cửa hàng đạt lớn nhất.

A. 29 triệu VNĐ

B. 27, 5 triệu VNĐ

C. 29, 5 triệu VNĐ

D. 27 triệu VNĐ

**Lời giải**

Gọi  $x$  (triệu VNĐ) là số tiền cần giảm cho mỗi chiếc xe ( $0 \leq x \leq 4$ ).

Số lượng xe bán ra được trong một năm sau khi giảm giá là:  $x.200 + 600$  (chiếc)

Số lợi nhuận thu được từ việc bán xe trong một năm sau khi giảm giá là:  $(x.200 + 600)(4 - x)$

Xét hàm số  $f(x) = (x.200 + 600)(4 - x) = 200(-x^2 + x + 12)$  ( $0 \leq x \leq 4$ ) đạt giá trị lớn nhất là

$$2450 \text{ khi } x = \frac{1}{2}.$$

- Câu 139. (TH)** Một cửa hàng bán quả vải thiều của Bắc Giang với giá bán là 30000 đồng/ 1kg. Giá nhập vào là 16000 đồng/1 kg. Với giá này cửa hàng ước chừng bán được 100 kg/ ngày. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính cứ giảm 1000 đồng/ 1kg thì số vải thiều bán được sẽ tăng thêm là 10kg.

a) Nếu giữ nguyên giá ban đầu, lợi nhuận theo ngày của cửa hàng là 1400000 đồng.

b) Nếu giá bán là 20000 đồng/ 1kg, khi đó cửa hàng bán được 250kg / ngày.

c) Gọi  $x$  (nghìn) là giá tiền mà cửa hàng dự định bán ( $16 \leq x \leq 30$ ), khi đó lợi nhuận theo ngày của cửa hàng được xác định bởi hàm số  $f(x) = (x - 16)(400 - 10x)$ .

d) Lợi nhuận tối đa theo ngày của cửa hàng là 1600000 đồng.

**Lời giải**

(a) Đúng

Lợi nhuận theo ngày của cửa hàng là  $(30000 - 16000) \cdot 100 = 1400000$  (đồng)

(b) Sai

Với giá 20000 đồng/ 1kg, khi đó cửa hàng bán được  $100 + (30 - 20) \cdot 10 = 200$  (kg).

(c) Đúng.

Gọi  $x$  (nghìn) là giá tiền mà cửa hàng dự định bán ( $16 \leq x \leq 30$ ).

Khi đó số kg vải bán được sẽ là  $100 + (30 - x) \cdot 10 = 400 - 10x$

Lợi nhuận thu được theo ngày là:  $(x - 16)(400 - 10x) = -10x^2 + 560x - 6400$ .

(d) Sai.

$$(x - 16)(400 - 10x) = -10x^2 + 560x - 6400 = -10(x - 28)^2 + 1440 \leq 1440.$$

Vậy lợi nhuận tối đa là 1440000 đồng/ ngày, xảy ra khi giá bán là 28000 đồng/1kg.

**Câu 140. (VD)** Công ty du lịch Ban Mê dự định tổ chức một tua xuyên Việt. Công ty dự định nếu giá tua là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 150 người tham gia. Để kích thích mọi người tham gia, công ty quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá tua 100 ngàn đồng thì sẽ có thêm 20 người tham gia. Hỏi công ty phải bán giá tua là bao nhiêu để doanh thu từ tua xuyên Việt là lớn nhất.

**A.** 1375000.

**B.** 3781250.

**C.** 2500000.

**D.** 3000000.

**Lời giải**

Gọi  $x$  (triệu đồng) là giá tua.

Giá đã giảm so với ban đầu là  $2 - x$ .

Số người tham gia tăng thêm nếu giá bán  $x$  là:  $\frac{(2 - x)20}{0,1} = 400 - 200x$ .

Số người sẽ tham gia nếu bán giá  $x$  là:  $150 + (400 - 200x) = 550 - 200x$ .

Tổng doanh thu là:  $f(x) = x(550 - 200x) = -200x^2 + 550x$ .

$$f'(x) = -400x + 550. \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11}{8}.$$

Bảng biến thiên

|         |   |                  |           |
|---------|---|------------------|-----------|
| $x$     | 0 | $\frac{11}{8}$   | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |   | +                | -         |
| $f(x)$  |   | $\frac{3025}{8}$ |           |

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy  $f(x)$  đạt giá trị lớn nhất khi  $x = \frac{11}{8} = 1,375$ .

Vậy công ty cần đặt giá tua 1375000 đồng thì tổng doanh thu sẽ cao nhất là 378125000 đồng.

**Câu 141. (VD)** Một doanh nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Giả sử khi sản xuất và bán hết  $x$  sản phẩm đó ( $0 < x \leq 2000$ ), tổng số tiền doanh nghiệp thu được (đơn vị: chục nghìn đồng) là

$f(x) = 2000x - x^2$  và tổng chi phí (đơn vị: chục nghìn đồng) doanh nghiệp chi ra là  $g(x) = x^2 + 1440x + 50$ . Giả sử mức thuế phụ thu trên một đơn vị sản phẩm bán được là  $t$  (chục nghìn đồng) ( $0 < t < 300$ ). Mức thuế phụ thu  $t$  (trên một đơn vị sản phẩm) sao cho nhà nước nhận được số tiền thuế phụ thu lớn nhất và doanh nghiệp cũng thu được lợi nhuận lớn nhất theo mức thuế phụ thu đó là

- A.  $t = 2500000$ .      B.  $t = 2600000$ .      C.  $t = 2700000$ .      D.  $t = 2800000$ .

**Lời giải**

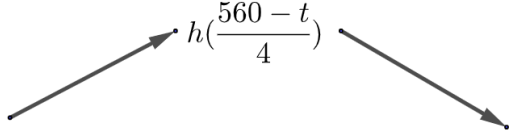
Lợi nhuận doanh nghiệp thu được là:

$$h(x) = (2000x - x^2) - (x^2 + 1440x + 50) - tx = -2x^2 + (560 - t)x - 50 \text{ với } 0 < x \leq 2000$$

Xét hàm  $h(x) = -2x^2 + (560 - t)x - 50$ , với  $0 < x \leq 2000$ .

$$\text{Ta có } h'(x) = -4x + 560 - t = 0 \Rightarrow x = \frac{560 - t}{4} \in (0; 2000)$$

Bảng biến thiên:

|         |                                                                                     |                     |      |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|------|
| $x$     | 0                                                                                   | $\frac{560 - t}{4}$ | 2000 |
| $h'(x)$ | +                                                                                   | 0                   | -    |
| $h(x)$  |  |                     |      |

Từ bảng biến thiên ta thấy lợi nhuận doanh nghiệp cao nhất tại  $x = \frac{560 - t}{4}$ .

Khi đó số tiền thuế thu được từ doanh nghiệp là  $k(t) = \frac{560 - t}{4} \cdot t = \frac{-t^2}{4} + \frac{560}{4}$ , với  $0 < t < 300$

Bảng biến thiên:

|         |                                                                                      |     |     |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------|-----|-----|
| $t$     | 0                                                                                    | 280 | 300 |
| $k'(t)$ | +                                                                                    | 0   | -   |
| $k(t)$  |  |     |     |

Từ bảng biến thiên ta thấy mức thuế phụ thu trên một đơn vị sản phẩm bán được là  $t = 280 \Rightarrow x = 70$  (sản phẩm).

Vậy mức thuế phụ thu là 2 800 000 đồng/ sản phẩm, doanh nghiệp sản xuất và bán hết 70 sản phẩm.

**Câu 142. (VD)** Gia đình ông Thanh nuôi tôm với diện tích ao nuôi là  $100 \text{ m}^2$ . Vụ tôm vừa qua ông nuôi với mật độ là  $1 (\text{kg} / \text{m}^2)$  tôm giống và sản lượng tôm khi thu hoạch được khoảng 2 tấn tôm.

Với kinh nghiệm nuôi tôm nhiều năm, ông cho biết cứ thả giảm đi  $(200 \text{ g} / \text{m}^2)$  tôm giống thì sản lượng tôm thu hoạch được 2,2 tấn tôm. Vậy vụ tới ông phải thả bao nhiêu kg tôm giống để

đạt sản lượng tôm cho thu hoạch là lớn nhất? (Giả sử không có dịch bệnh, hao hụt khi nuôi tôm giống).

A.  $\frac{230}{3}$  kg

B. 70 kg

C. 72 kg

D. 69 kg

**Câu 143. (VD)** Nhà xe khoán cho hai tài xế An và Bình mỗi người lần lượt nhận 32 lít và 72 lít xăng trong một tháng. Biết rằng trong một ngày tổng số xăng cả hai người sử dụng là 10 lít. Tổng số ngày ít nhất để hai tài xế sử dụng hết số xăng được khoán là bao nhiêu (biết số lít xăng tiêu thụ trong các ngày là như nhau).

**Lời giải**

Gọi  $x$ (lít) ( $0 < x < 10$ ) là số xăng An sử dụng trong 1 ngày.

Khi đó:  $10 - x$  (lít) là số xăng Bình sử dụng trong 1 ngày.

Suy ra  $f(x) = \frac{32}{x} + \frac{72}{10-x}$ ,  $x \in (0; 10)$  là tổng số ngày An và Bình sử dụng hết số xăng được khoán.

Ta có:  $f'(x) = -\frac{32}{x^2} + \frac{72}{(10-x)^2}$ . Cho  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{32}{x^2} + \frac{72}{(10-x)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -20 \notin (0; 10) \end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số  $f(x) = \frac{32}{x} + \frac{72}{10-x}$ ,  $x \in (0; 10)$

|         |           |   |    |   |           |
|---------|-----------|---|----|---|-----------|
| $x$     | 0         | 4 | 10 |   |           |
| $f'(x)$ |           | - | 0  | + |           |
| $f(x)$  | $+\infty$ |   | 20 |   | $+\infty$ |

Dựa vào BBT ta có ít nhất 20 ngày thì An và Bình sử dụng hết lượng xăng được khoán.

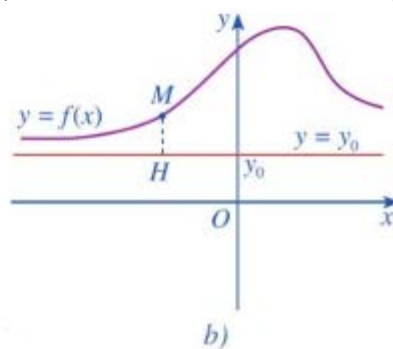
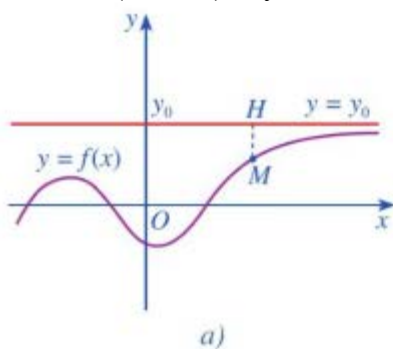
**Loại 5: Thiết lập hàm liên quan đến bài toán thực tế khác.**

**Câu 144. (VD)** Một con cá hồi bơi ngược dòng nước để vượt một khoảng cách là 300 km. Vận tốc dòng nước là 6 (km/h). Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là  $v$  (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong  $t$  giờ được cho bởi công thức  $E(v) = cv^3t$  (trong đó  $c$  là hằng số dương,  $E$  được tính bằng đơn vị Jun). Cá bơi ngược dòng quãng đường 300 km trên trong khoảng thời gian  $t$  với vận tốc bằng bao nhiêu để năng lượng tiêu hao là thấp nhất?

**DẠNG 4: ỨNG DỤNG THỰC TẾ TIỆM CẬN****A. TÓM TẮT KIẾN THỨC****1. Đường tiệm cận ngang**

Đường thẳng  $y = y_0$  được gọi là **đường tiệm cận ngang** (hay **tiệm cận ngang**) của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nếu:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$  hoặc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$ .

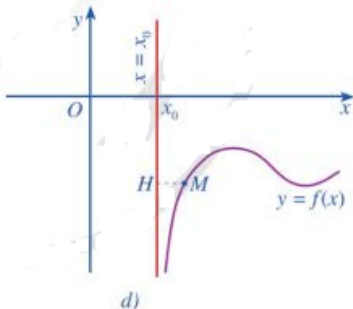
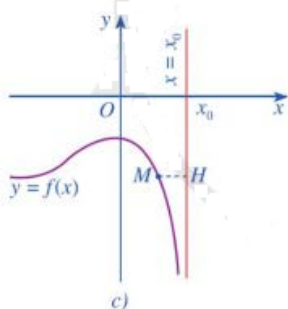
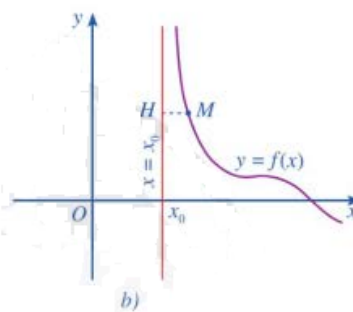
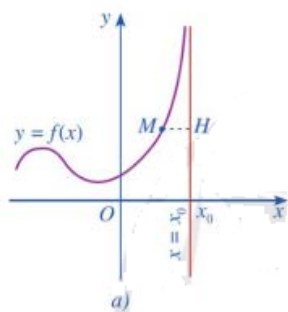
**Nhận xét:** Giả sử đường thẳng  $y = y_0$  là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = f(x)$ . Lấy điểm  $M(x; y)$  thuộc đồ thị hàm số. Gọi  $MH$  là khoảng cách từ điểm  $M$  đến đường thẳng  $y = y_0$ . Khi đó, độ dài  $MH$  tiến tới 0 khi  $x \rightarrow +\infty$  (hình a) hay khi  $x \rightarrow -\infty$  (hình b)

**2. Đường tiệm cận đứng**

Đường thẳng  $x = x_0$  được gọi là **đường tiệm cận đứng** (hay **tiệm cận đứng**) của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$$

**Nhận xét:** Giả sử đường thẳng  $x = x_0$  là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = f(x)$ . Lấy điểm  $M(x; y)$  thuộc đồ thị hàm số. Gọi  $MH$  là khoảng cách từ điểm  $M$  đến đường thẳng  $x = x_0$ . Khi đó, độ dài  $MH$  tiến tới 0 khi  $x \rightarrow x_0^-$  (hình a, c) hay khi  $x \rightarrow x_0^+$  (hình b, d)



☞ **Lưu ý:**

i) Hàm  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  (với  $ad-bc \neq 0, c \neq 0$ )

có tiệm cận đứng  $x = -\frac{d}{c}$ ; tiệm cận ngang  $y = \frac{a}{c}$ .

ii) Hàm  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$  với  $f(x), g(x)$  là những hàm đa thức

+) Nếu bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu thì có tiệm cận ngang  $y = 0$ .

+) Nếu bậc tử bằng bậc mẫu thì có tiệm cận ngang  $y = \frac{a_n}{b_n}$  với  $a_n, b_n$  là hệ số của lũy thừa cao nhất trên tử và dưới mẫu.

+) Nếu bậc tử lớn hơn bậc mẫu thì không có tiệm cận ngang.

+)  $x = x_0$  là tiệm cận đứng  $\Leftrightarrow \begin{cases} g(x_0) = 0; f(x_0) \neq 0 \\ g(x_0) = f(x_0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm \infty \end{cases}$ .

### \* Kỹ năng dùng Casio

Giả sử cần tính  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  ta dùng chức năng CALC để tính giá trị của  $f(x)$  tại các giá trị của  $x$  rất gần  $a$ .

#### 1. Giới hạn của hàm số tại một điểm

- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  thì nhập  $f(x)$  và CALC  $x = a + 10^{-9}$ .
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  thì nhập  $f(x)$  và CALC  $x = a - 10^{-9}$ .
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  thì nhập  $f(x)$  và CALC  $x = a + 10^{-9}$  hoặc  $x = a - 10^{-9}$ .

#### 2. Giới hạn của hàm số tại vô cực

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  thì nhập  $f(x)$  và CALC  $x = 10^{10}$ .
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  thì nhập  $f(x)$  và CALC  $x = -10^{10}$ .

## B. BÀI TẬP

**Câu 1.** (TH) Số dân của một thị trấn sau  $t$  năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức  $f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$  ( $f(t)$  được tính bằng nghìn người) (Nguồn: Giải tích 12 nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020). Xem  $y = f(t)$  là một hàm số xác định trên nửa khoảng  $[0; +\infty)$ . Đồ thị hàm số  $y = f(t)$  có đường tiệm cận ngang là  $y = a$ . Giá trị của  $a$  là bao nhiêu?

**Lời giải**

**Trả lời:** 26

Ta có:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{26t+10}{t+5} = 26$ . Nên đồ thị hàm số  $f(t)$  có đường tiệm cận ngang là  $y = 26$ . Vậy  $a = 26$ .

**Câu 2.** (TH) Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất  $x$  sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số  $F(x) = 60000 + 250x$ . Gọi  $F(x)$  là hàm số biểu thị chi phí trung bình (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất  $x$  sản phẩm ( $x \geq 0$ ), khi đó tiệm cận ngang của đồ thị hàm số bằng

- A.  $x = 250$ .      B.  $y = \frac{1}{240}$ .      C.  $y = 240$ .      D.  $y = 250$ .

**Lời giải**

Chi phí trung bình để sản xuất  $x$  sản phẩm là  $F(x) = \frac{60000 + 250x}{x}$  (nghìn đồng).

Ta có  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{60000 + 250x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{60000}{x} + 250 \right) = 250$ .

- Câu 3. (TH)** Số dân của một thị trấn sau  $t$  năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức  $f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5}$ ;  $f(t)$  được tính bằng nghìn người (Nguồn: Giai tích 12 nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020). Xem  $f(t)$  là một hàm số xác định trên nửa khoảng  $[0; +\infty)$ . Đồ thị hàm số  $y = f(t)$  có đường tiệm cận ngang là  $y = a$ . Giá trị của  $a$  là bao nhiêu?
- A. 20.                      B. 36.                      C. 10.                      **D. 26.**

**Lời giải**

Ta có:  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{26t + 10}{t + 5} = 26$ . Nên đồ thị hàm số  $f(t)$  có đường tiệm cận ngang là  $y = 26$ .

- Câu 4. (TH)** Một nhà máy sản xuất linh kiện điện tử thống kê được rằng trung bình một tổ sản xuất với  $x$  người thì số sản phẩm sản xuất được trong một thời gian cố định được tính bằng công thức  $P(x) = \frac{5000x}{4x + 25}$ . Xem  $y = P(x)$  là một hàm số xác định trên  $[0; +\infty)$ , khi đó tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là
- A.  $y = 25$ .                      B.  $x = 25$ .                      C.  $x = 1250$ .                      **D.  $y = 1250$ .**

**Lời giải**

Ta có:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5000x}{4x + 25} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5000}{4 + \frac{25}{x}} = 1250$ .

Vậy tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là  $y = 1250$ .

- Câu 5. (TH)** Số lượng sản phẩm của công ty bán được trong  $x$  (tháng) được tính bởi công thức  $S(x) = 300 \left( 2 + \frac{4}{x+2} \right)$  với  $x \geq 1$ . Xem  $y = S(x)$  là một hàm số xác định trên  $[1; +\infty)$ , khi đó tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là
- A.  $y = 600$ .**                      B.  $x = 600$ .                      C.  $x = 300$ .                      D.  $y = 2400$ .

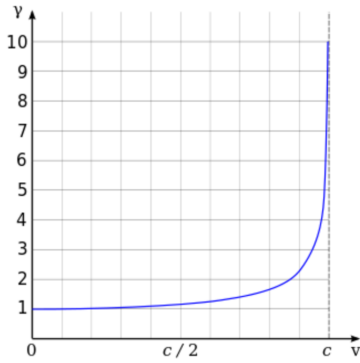
**Lời giải**

Ta có:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 300 \left( 2 + \frac{4}{x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 600 + \frac{\frac{1200}{x}}{1 + \frac{2}{x}} \right) = 600$ .

Vậy tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là  $y = 600$ .

- Câu 6. (TH)** Một ứng dụng của hàm số trong vật lý là hệ số tương đối tính Lorentz được cho bởi công thức  $\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ , với  $v$  là vận tốc tương đối giữa các hệ quy chiếu quán tính,  $c$  là tốc độ

ánh sáng trong chân không. Hàm này được sử dụng trong thuyết tương đối đặc biệt của Einstein để mô tả các hiệu ứng tương đối tính có đồ thị trông như thế này:



Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là:

- A.  $x = 0$ .      B.  $y = 0$ .      C.  $x = c$ .      D.  $x = \frac{c}{2}$ .

**Lời giải**

$$\lim_{v \rightarrow c} y(v) = \lim_{v \rightarrow c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = +\infty \text{ nên } x = c \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị.}$$

**Câu 7.** (TH) Dân số P (ngàn người) của một khu nghỉ dưỡng được cho bởi hàm số  $P(t) = \frac{400t}{2t^2 + 7}, t \geq 0$ , với  $t$  là thời gian tính theo tháng. Tìm tiệm cận ngang đồ thị hàm số  $y = P(t)$ .

- A.  $y = 0$ .      B.  $y = 200$ .      C.  $x = 0$ .      D.  $y = \frac{400}{7}$ .

**Lời giải**

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{400}{2 + \frac{7}{t^2}} = 0 \text{ nên } y = 0 \text{ là tiệm cận ngang của đồ thị.}$$

$$\text{Ta có } \lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{400t}{2t^2 + 7} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{400}{2 + \frac{7}{t^2}} = \frac{0}{2} = 0. \text{ Do vậy tiệm cận ngang đồ thị hàm số}$$

$y = P(t)$  là đường thẳng  $y = 0$ .

**Câu 8.** (VD) Trong 200 gam dung dịch muối nồng độ 15%, giả sử thêm vào dung dịch  $x$  (gam) muối tinh khiết và được dung dịch có nồng độ  $f(x)\%$ .

- a) Hàm số  $f(x) = \frac{100(x + 200)}{x + 30}$ .  
b) Đạo hàm của hàm số luôn nhận giá trị âm trên khoảng  $(0; +\infty)$ .  
c) Thêm càng nhiều gam muối tinh khiết thì nồng độ phần trăm càng tăng và không vượt quá 100%.  
d) Giới hạn của  $f(x)$  khi  $x$  dần đến dương vô cực bằng 100.

**Lời giải**

(a) Trong 200 gam dung dịch muối nồng độ 15% có  $200 \cdot \frac{15}{100} = 30$  (gam) muối tinh khiết.

Khi thêm  $x$  (gam) muối tinh khiết vào 200 gam dung dịch muối nồng độ 15% thì có  $(x + 30)$  (gam) muối tinh khiết. Khi đó, ta có hàm số là

$$f(x) = \frac{100(x+30)}{x+200}. \text{ Suy ra (a) sai.}$$

$$(b) \text{ Ta có } f'(x) = \frac{17000}{(x+200)^2} > 0, \forall x \in (0; +\infty). \text{ Suy ra (b) sai.}$$

(c) Vì  $f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$  nên khi  $x$  tăng thì  $f(x)$  tăng. Nghĩa là khi thêm càng nhiều gam muối tinh khiết thì dung dịch có nồng độ phần trăm càng tăng.

$$\text{Vì } x+30 < x+200 \text{ với mọi } x \in (0; +\infty) \text{ nên } \frac{x+30}{x+200} < 1 \text{ dẫn đến } f(x) = \frac{100(x+30)}{x+200} < 100.$$

Nghĩa là nồng độ phần trăm không vượt quá 100% khi cho thêm nhiều gam muối tinh khiết vào. **Suy ra (c) đúng.**

$$(d) \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{100(x+30)}{x+200} = 100. \text{ Suy ra (d) đúng.}$$

**Câu 9.**

(TH) Số dân của một thị trấn sau  $t$  năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức  $f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$  ( $f(t)$  được tính bằng nghìn người) (Nguồn: Giải tích 12 nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020). Xem  $y = f(t)$  là một hàm số xác định trên nửa khoảng  $[0; +\infty)$ .

a) Dân số của thị trấn đó vào năm 2025 là 34 nghìn người.

b) Đạo hàm của hàm số luôn nhận giá trị âm trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

c) Đồ thị hàm số  $y = f(t)$  có đường tiệm cận ngang là  $y = 26$ .

d) Dân số của thị trấn đó không thể vượt quá 26 nghìn người.

**Lời giải**

(a) Dân số của thị trấn đó vào năm 2025 là  $f(55) = \frac{26 \cdot 55 + 10}{55 + 5} = 24$  nghìn người. **Suy ra (a) sai.**

(b) Đạo hàm của hàm số  $f'(t) = \frac{120}{(t+5)^2} > 0$  ( $\forall t \neq -5$ ) luôn nhận giá trị dương trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

**Suy ra (b) sai.**

(c) Ta có:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{26t+10}{t+5} = 26$ . Do đó đồ thị hàm số  $f(t)$  có đường tiệm cận ngang là  $y = 26$ . **Suy ra (c) đúng.**

(d) Ta có  $f(t) = \frac{26t+10}{t+5} < \frac{26t+130}{t+5} = 26$ . Vì vậy dân số của thị trấn đó không thể vượt quá 26 nghìn người. **Suy ra (d) đúng.**

**Câu 10.**

(VD) Bạn Nam có một hộp quà hình lăng trụ tam giác đều có diện tích xung quanh bằng  $900 \text{ cm}^2$ . Nam muốn mua vừa đủ một cuộn dây màu đỏ để dán đường viền tất cả các cạnh của hộp. Biết chiều cao của hộp quà là  $x \text{ (cm)}$ . Gọi biểu thức tính độ dài của cuộn dây là  $P(x)$ . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Đồ thị hàm số  $P(x)$  có đường tiệm cận xiên  $y = 3x$ .

b) Đồ thị hàm số  $P(x)$  có ba đường tiệm cận.

**Lời giải**

(a) Mệnh đề đúng

Ta có cạnh đáy của hộp có độ dài là  $\frac{300}{x} \text{ (cm)}$

Chiều dài của cuộn dây là  $P(x) = 3x + 6 \cdot \frac{300}{x} = \frac{3x^2 + 1800}{x} \text{ (cm)}$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} [P(x) - 3x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2 + 1800}{x} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1800}{x} = 0.$$

$$\text{Tương tự } \lim_{x \rightarrow -\infty} [P(x) - 3x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3x^2 + 1800}{x} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1800}{x} = 0$$

Vậy đồ thị hàm số  $P(x)$  có đường tiệm cận xiên  $y = 3x$ .

**(b) Mệnh đề sai**

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0^+} P(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2 + 1800}{x} = +\infty. \text{ Tương tự } \lim_{x \rightarrow 0^-} P(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x^2 + 1800}{x} = -\infty$$

Vậy  $x = 0$  là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $P(x)$

$$\text{Lại có } \lim_{x \rightarrow +\infty} [P(x) - 3x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2 + 1800}{x} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1800}{x} = 0.$$

$$\text{Tương tự } \lim_{x \rightarrow -\infty} [P(x) - 3x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3x^2 + 1800}{x} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1800}{x} = 0$$

Vậy đồ thị hàm số  $P(x)$  có đường tiệm cận xiên  $y = 3x$ .

Vậy đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

**Câu 11. (VD)** Một bể chứa 5000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 30 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 25 lít/phút.

**a)** Chứng tỏ nồng độ muối trong bể sau  $t$  phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là  $f(t) = \frac{30t}{200+t}$ .

**b)** Xem  $y = f(t)$  là một hàm số xác định trên nửa khoảng  $[0; +\infty)$ , hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

**c)** Nêu nhận xét về nồng độ muối trong bể sau thời gian  $t$  ngày càng lớn.

**Lời giải**

**(a)** Sau  $t$  phút, ta có khối lượng muối trong bể là  $25.30t = 750t$  (gam).

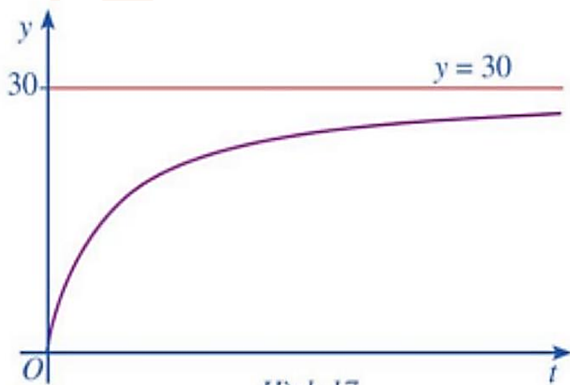
Thể tích của lượng nước trong bể là  $5000 + 25t$  (lít).

$$\text{Vậy nồng độ muối sau } t \text{ phút là } f(t) = \frac{750t}{5000 + 25t} = \frac{30t}{200+t} \text{ (gam / lít)}.$$

**(b)** Ta có:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30}{200+t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( 30 - \frac{6000}{200+t} \right) = 30.$$

Vậy đường thẳng  $y = 30$  là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $f(t)$  (Hình 17).



(c) Ta có đồ thị hàm số  $y = f(t)$  nhận đường thẳng  $y = 30$  làm tiệm cận ngang, tức là khi  $t$  càng lớn thì nồng độ muối trong bể sẽ tiến gần đến mức 30 (gam/lít). Lúc đó, nồng độ muối trong bể sẽ gần như bằng nồng độ muối trong nước muối được bơm vào bể.

**Câu 12. (VD)** Nồng độ oxygen trong hồ theo thời gian  $t$  cho bởi công thức  $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$ , với  $y$  được tính theo  $mg/l$  và  $t$  được tính theo giờ,  $t \geq 0$ .

a) Đồ thị hàm số  $y(t)$  có hai đường tiệm cận bao gồm một đường tiệm cận ngang và một đường tiệm cận xiên.

b) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là  $y = 5$ .

c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là  $t = \frac{1}{3}$ .

d) Sau một thời gian đủ dài, nồng độ oxygen trong hồ sẽ bão hòa và đạt ngưỡng  $5 mg/l$ .

**Lời giải**

$$y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1} = \frac{45t^2 + 5 - 15t}{9t^2 + 1} = \frac{45t^2 - 15t + 5}{9t^2 + 1}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{45t^2 - 15t + 5}{9t^2 + 1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{45 - \frac{15}{t} + \frac{5}{t^2}}{9 + \frac{1}{t^2}} = \frac{45 - 0 + 0}{9 + 0} = 5$$

(a) Hàm số  $y(t)$  có một đường tiệm cận ngang là  $y = 5$  và không có tiệm cận xiên.

Do đó mệnh đề **sai**.

(b)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 5 \Rightarrow y = 5$  là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Do đó mệnh đề **đúng**.

$$(c) \lim_{t \rightarrow \frac{1}{3}} y(t) = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{45t^2 - 15t + 5}{9t^2 + 1} = \frac{45 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 15 \cdot \frac{1}{3} + 5}{9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1} = \frac{5}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{3} \text{ không phải là đường tiệm cận}$$

đứng của đồ thị hàm số.

Do đó mệnh đề **sai**.

(d) Ta nhận thấy  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 5$  điều này chứng tỏ rằng khi thời gian đủ dài, nồng độ oxygen trong hồ sẽ bão hòa và đạt ngưỡng  $5 mg/l$ .

Do đó mệnh đề **đúng**.

**Câu 13. (VD)** Một bể chứa 3000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 25 gam muối cho một lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Xét tính đúng sai của mỗi khẳng định sau

a) Sau một giờ bơm thì khối lượng muối trong bể là 30(kg)

b) Thể tích lượng nước trong bể sau thời gian  $t$  phút là  $3000 + 20t$  (lít)

c) Giả sử nồng độ muối trong nước trong bể sau  $t$  phút được xác định bởi một hàm số  $f(t)$  trên  $[0; +\infty)$  (gam/ lít) thì đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = f(t)$  là đường thẳng  $y = 20$ .

d) Khi  $t$  càng lớn thì nồng độ muối trong bể tiến gần đến 25 gam/lít.

**Lời giải**

**Đáp số**

| a    | b    | c   | d    |
|------|------|-----|------|
| đúng | đúng | sai | đúng |

(a) Đổi 1 giờ = 60 phút

khối lượng muối sau khi bơm 60 phút là:  $60.20.25 = 30000 \text{ (gam)} = 30 \text{ (kg)} \Rightarrow \text{a đúng}$

(b) Thể tích lượng nước bơm vào bể sau thời gian  $t$  phút là  $20t$  (lít)

$\Rightarrow$  Thể tích lượng nước trong bể sau thời gian  $t$  phút là:  $3000 + 20t$  (lít)  $\Rightarrow \text{b đúng}$

(c) Sau thời gian bơm  $t$  phút thì khối lượng muối trong bể là  $25.20.t = 500t$  (gam)

$\Rightarrow$  nồng độ muối trong bể sau khi bơm được  $t$  phút là:  $f(t) = \frac{500t}{3000 + 20t} = \frac{25t}{150 + t}$  (gam/lít)

$\Rightarrow$  đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = f(t)$  là  $y = 25 \Rightarrow \text{c sai}$

(d) Ta có  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25t}{150 + t} = 25$  nên khi  $t$  càng lớn thì nồng độ muối trong bể tiến gần đến 25 gam/lít  $\Rightarrow \text{d đúng}$ .

**Câu 14. (VD)** Số lượng xe máy điện bán được của một cửa hàng bán xe máy điện trong địa bàn thành phố Vinh trong tháng thứ  $x$  được tính theo công thức  $f(x) = 50 - \frac{30}{2+x}$ , trong đó  $x \geq 1$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

a) Số lượng xe máy điện của cửa hàng được bán ra trong tháng đầu là 40 (xe)

b) Từ tháng thứ ba trở đi thì số lượng xe bán ra trong tháng đạt mức lớn hơn hoặc bằng 45 xe/tháng

c) Nếu xem  $y = f(x)$  là một hàm số xác định trên  $[1; +\infty)$  thì đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  là  $y = 0$

d) Khi  $x$  càng lớn thì số lượng xe bán ra càng tiến gần đến mức 50 xe/tháng

**Lời giải**

**Đáp số**

| a    | b   | c   | d    |
|------|-----|-----|------|
| đúng | sai | sai | đúng |

(a) Số lượng xe máy điện của cửa hàng được bán ra trong tháng đầu là  $f(1) = 50 - \frac{30}{2+1} = 40$  (xe)

$\Rightarrow \text{a đúng}$ .

(b) Ta có:  $f(x) \geq 45 \Leftrightarrow \frac{30}{2+x} \leq 5 \Leftrightarrow 2+x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq 4 \Rightarrow$  để bán được từ 45 xe trở lên trong mỗi tháng thì phải từ tháng thứ tư trở đi  $\Rightarrow \text{b sai}$ .

(c) Ta có:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 50 - \frac{30}{2+x} \right) = 50 \Rightarrow$  Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  là đường thẳng  $y = 50 \Rightarrow \text{c sai}$ .

(d) Vì tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  là đường thẳng  $y = 50$  nên khi  $x$  càng lớn thì số lượng xe bán ra càng tiến gần đến mức 50xe/tháng  $\Rightarrow \text{d đúng}$ .

**Câu 15. (VD)** Một bể chứa 5000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 30 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 25 lít/phút.

a) Sau 10 phút bơm số lượng muối trong bể là 300 gam.

b) Nếu bơm trong một giờ đồng hồ thì số lượng muối trong bể không vượt quá 2 kg.

c) Nồng độ muối trong bể sau  $t$  phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít là  $f(t) = \frac{30t}{200+t}$ .

d) Khi  $t$  đủ lớn thì nồng độ muối trong bể sẽ tiến gần đến mức 30 (gam/lít).

**Lời giải:**

(a) Số lượng muối trong bể sau 10 phút bơm là  $30.25.10 = 7500$  gam. (a) sai

(b) Số lượng muối trong bể sau một giờ đồng hồ bơm là  $30.25.60 = 4500$  gam. (b) sai

(c) Sau  $t$  phút, ta có: Khối lượng muối trong bể là  $25.30t = 750t$  (gam); thể tích của lượng nước trong bể là  $5000 + 25t$  (lít). Vậy nồng độ muối sau  $t$  phút là  $f(t) = \frac{750t}{5000 + 25t} = \frac{30t}{200 + t}$  (gam/lít). (c) đúng

(d) khi  $t$  đủ lớn ta có  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{750t}{5000 + 25t} = 30$ .

Vậy  $t$  đủ lớn thì nồng độ muối trong bể sẽ tiến gần đến mức 30(gam/lít). (d) đúng.

**Câu 16. (VD)** Số dân của một thị trấn sau  $t$  năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức  $f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5}$  ( $f(t)$  được tính bằng nghìn người) (nguồn: Giải tích 12 nâng cao, NXBGD Việt Na, 2000).

a) số dân của thị trấn đó sau 10 năm là 18.000 người.

b) Số dân thị trấn đó vào năm 2025 là 24.000 người.

c) Xem  $f(t)$  là một hàm số xác định trên nửa khoảng  $[0; +\infty)$ . Đồ thị hàm số  $f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5}$  có tiệm cận ngang là  $y = 26$ .

d) Đạo hàm của hàm số  $y = f(t)$  biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Vào năm 1990 thì tốc độ tăng dân số là 0,129 nghìn người trên /năm.

**Lời giải:**

(a) số dân của thị trấn đó sau 10 năm là  $\frac{26.10 + 10}{10 + 5} = 18$  (nghìn). (a) đúng.

(b) Số dân thị trấn đó vào năm 2025 là  $\frac{55.10 + 10}{55 + 5} = 24$  (nghìn). (b) đúng

(c)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{26t + 10}{t + 5} = 26$ . (c) đúng

(d) ta có  $f'(t) = \frac{120}{(t + 5)^2}$

Theo đề  $f'(t) = 0,129 \Leftrightarrow \frac{120}{(t + 5)^2} = 0,129 \Rightarrow t = 20$ .

Vậy vào năm 1990 thì tốc độ tăng dân số là 0,129 nghìn người trên /năm. (d) đúng.

**Câu 17. (TH)** Một bể chứa 1000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 15 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Biết rằng nồng độ muối trong bể sau  $t$  phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là một hàm số  $f(t)$ , thời gian  $t$  tính bằng phút. Phương trình tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $f(t)$  bằng ...

**Lời giải**

Sau  $t$  phút, ta có khối lượng muối trong bể là  $20.15t = 300t$  (gam).

Thể tích của lượng nước trong bể sau  $t$  phút là  $1000 + 20t$  (lít).

Vậy nồng độ muối sau  $t$  phút là  $f(t) = \frac{300t}{1000 + 20t} = \frac{30t}{100 + 2t}$  (gam/lít)

$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{100 + 2t} = 15$  nên đồ thị hàm số  $y = f(t)$  có phương trình tiệm cận ngang là  $y = 15$ .

**Câu 18. (TH)** Một bể chứa  $2 m^3$  nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ không đổi với tốc độ 20 lít/phút. Biết rằng nồng độ muối trong bể sau  $t$  phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là một hàm số  $f(t)$ , thời gian

$t$  tính bằng phút. Biết rằng tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $f(t)$  là  $y = 10$ . Nồng độ muối trong bể sau khi bơm được 1 giờ là ...

**Lời giải**

Giả sử nước muối bơm vào có nồng độ  $a$  gam/lít.

Sau  $t$  phút, ta có khối lượng muối trong bể là  $20at$  (gam).

Thể tích của lượng nước trong bể sau  $t$  phút là  $2000 + 20t$  (lít).

Vậy nồng độ muối sau  $t$  phút là  $f(t) = \frac{20at}{2000 + 20t} = \frac{at}{100 + t}$  (gam/lít)

$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{at}{100 + t} = a$  nên đồ thị hàm số  $y = f(t)$  có phương trình tiệm cận ngang là  $y = a = 10$ .

Từ đó hàm số nồng độ muối trong bể sau khi bơm được  $t$  phút là  $f(t) = \frac{10t}{100 + t}$ .

Nồng độ muối sau 1 giờ bơm là  $f(60) = \frac{10 \cdot 60}{100 + 60} = 3,75$  gam/ lít.

**Câu 19. (TH)** Một tác giả muốn xuất bản một cuốn sách Toán học. Biết phí xuất bản là 7 triệu đồng và giá tiền in mỗi cuốn sách là 50 000 đồng. Gọi  $t$  ( $t \geq 1$ ) là số cuốn sách sẽ in và  $f(t)$  (Đơn vị nghìn đồng) là chi phí trung bình của mỗi cuốn sách. Khi đó, phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $f(t)$  là :

Đáp số:  $y = 50$

**Lời giải**

Tổng số tiền cần bỏ ra để in  $t$  cuốn sách là :  $7000 + 50t$  (nghìn đồng).

Chi phí trung bình của mỗi cuốn sách là  $f(t) = \frac{7000 + 50t}{t}$ .

Ta có  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 50$ .

Vậy  $y = 50$  là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $f(t)$ .

**Câu 20. (TH)** Một bể chứa 1000 lít nước muối có nồng độ 0,1 (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích bể, đơn vị gam/lít). Người ta bơm nước muối có nồng độ 0,2 vào bể với tốc độ 20 lít/phút. Gọi  $f(t)$  là nồng độ muối trong bể sau  $t$  phút. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $f(t)$  là :

Đáp số:  $y = 0,2$

**Lời giải**

Khối lượng muối có trong bể trong  $t$  phút là  $1000 \cdot 0,1 + 20 \cdot 0,2t = 100 + 4t$ .

Nồng độ muối trong bể sau  $t$  phút là  $\frac{100 + 4t}{1000 + 20t} = \frac{25 + t}{250 + 5t}$ .

Ta có  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0,2$ .

Vậy  $y = 0,2$  là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $f(t)$ .

**Câu 21. (VD)** Nồng độ oxygen trong hồ theo thời gian  $t$  cho bởi công thức  $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$ , với  $y$  được tính theo  $mg/l$  và  $t$  được tính theo giờ,  $t \geq 0$ . Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y(t)$ . Từ đó, có nhận xét gì về nồng độ oxygen trong hồ khi thời gian  $t$  trở nên rất lớn?

(Theo: [www.researchgate.net/publication/264903978\\_Microrespirometric\\_characterization\\_of\\_activated\\_sludge\\_inhibition\\_by\\_copper\\_and\\_zinc](http://www.researchgate.net/publication/264903978_Microrespirometric_characterization_of_activated_sludge_inhibition_by_copper_and_zinc))

**Lời giải**

Ta có  $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1} = \frac{45t^2 - 15t + 5}{9t^2 + 1}$ .

Xét hàm  $y(t)$  trên  $[0; +\infty)$ .

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{45t^2 - 15t + 5}{9t^2 + 1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{45 - \frac{15}{t} + \frac{5}{t^2}}{9 + \frac{1}{t^2}} = \frac{45}{9} = 5.$$

Vậy đồ thị hàm số  $y = y(t)$  có một tiệm cận ngang  $y = 5$ .

Nhận xét: Khi thời gian  $t$  trở nên rất lớn thì nồng độ oxygen trong hồ dần tiến tới  $5 \text{ mg/l}$ .

**Câu 22. (VD)** Tìm tiệm cận của đồ thị hàm số khối lượng hạt  $m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  trong đó  $m_0$  là khối lượng

ngỉ của hạt,  $c = 300000 \text{ km/s}$  là tốc độ ánh sáng.

**Lời giải**

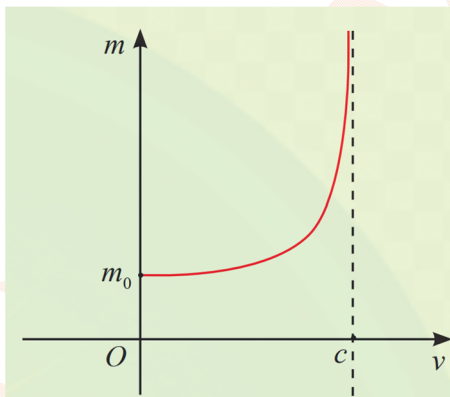
+ Xét trong hệ trục tọa độ  $vOm$

+ Điều kiện xác định:  $1 - \frac{v^2}{c^2} > 0 \Leftrightarrow 0 \leq v < c$  (Do vận tốc không âm)

+ Từ điều kiện xác định suy ra đồ thị hàm số  $m = m(v)$  không có đường tiệm cận ngang.

+ Xét giới hạn:  $\lim_{v \rightarrow c^-} m(v) = \lim_{v \rightarrow c^-} \left( \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = +\infty$

Vậy đồ thị hàm số  $m = m(v)$  có đường tiệm cận đứng có phương trình:  $v = c = 300000$ .



+ **Ý nghĩa:** Khi hạt di chuyển với tốc độ các gần tốc độ ánh sáng thì khối lượng của hạt sẽ tiến đến dương vô cùng!

**Câu 23. (VD)** Tại một công ty sản xuất đồ chơi an toàn cho trẻ em, công ty phải chi  $40000 \text{ USD}$  để thiết lập dây chuyền sản xuất ban đầu. Sau đó, cứ sản xuất được một sản phẩm đồ chơi  $A$ , công ty phải trả  $6 \text{ USD}$  cho nguyên liệu ban đầu và nhân công. Gọi  $x (x \geq 1)$  là số đồ chơi  $A$  mà công ty đã sản xuất và  $P(x)$  (đơn vị  $\text{USD}$ ) là tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất  $x$  đồ chơi  $A$ . Người ta xác định chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi  $A$  là  $F(x) = \frac{P(x)}{x}$ . Xem  $F(x)$  là hàm số theo  $x$  xác định trên nửa khoảng  $[1; +\infty)$ , phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $F(x)$  là.....

**Lời giải**

Một đồ chơi  $A$  công ty phải trả  $6USD$  nên  $x$  đồ chơi  $A$  công ty phải trả  $6x(USD)$  ( $x > 1$ ).

Khi đó tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất  $x$  đồ chơi  $A$  là

$$P(x) = 6x + 40000 \Rightarrow F(x) = \frac{P(x)}{x} = \frac{6x + 40000}{x}.$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{6x + 40000}{x} \right) = 6$$

Vậy  $y = 6$  là phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $F(x)$ .

**Câu 24. (VD)** Chi phí xuất bản  $x$  cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in...) được cho bởi  $C(x) = x^2 - 2000x + 10^8$  đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn

đồng.  $M(x) = \frac{T(x)}{x}$  với  $T(x)$  là tổng chi phí (xuất bản và phát hành) cho  $x$  cuốn tạp chí, được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản  $x$  cuốn. Khi số lượng cuốn tạp chí phát hành cực lớn thì chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí  $M(x)$  sẽ tiệm cận với đường nào.

**Lời giải**

Theo giả thiết, ta có:

$$T(x) = C(x) + 4000x = x^2 + 2000x + 10^8.$$

$$M(x) = \frac{T(x)}{x} = x + \frac{10^8}{x} + 2000.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (M(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x + \frac{10^8}{x} + 2000 - (x + 2000) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{10^8}{x} \right] = 0$$

Khi đó đồ thị hàm số có 1 tiệm cận xiên  $y = x + 2000$ . Khi số lượng cuốn tạp chí phát hành cực lớn thì chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí  $M(x)$  sẽ tiệm cận với đường  $y = x + 2000$ .

**Câu 25. (TH)** Một khu vườn hình chữ nhật tiếp giáp với bờ sông được rào lại để làm vườn trồng hoa màu; biết phía bên bờ sông không cần hàng rào. Diện tích khu vườn là  $1000(m^2)$ . Hàng rào ở phía song song với sông có chi phí là 36.000 (đồng) trên một  $m^2$ , hàng rào ở hai phía còn lại (vuông góc với bờ sông) là 80.000 (đồng) trên một  $m^2$ . Bốn trụ ở bốn góc vườn có giá là 250.000 (đồng) mỗi trụ. Gọi  $x$  là độ dài một cạnh vuông góc với bờ sông và hàm  $C(x)$  mô tả chi phí của dự án. Phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = C(x)$  là:.....

**Lời giải**

Điều kiện:  $x > 0$ , chiều rộng của khu vườn là  $x(m) \Rightarrow$  chiều dài của khu vườn là  $\frac{1000}{x}(m)$ .

Khi đó chi phí của dự án là  $C(x) = 160x + \frac{36000}{x} + 1000$  (nghìn đồng)

Ta có  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [C(x) - (160x + 1000)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{36000}{x} \right] = 0 \Rightarrow y = 160x + 1000$  là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = C(x)$ .

**Câu 26. (VD)** Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích bằng  $900 m^2$ . Biết chiều dài của mảnh vườn là  $x(m)$ . Gọi biểu thức tính chu vi của mảnh vườn là  $P(x)$  (mét). Biết rằng phương trình tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $P(x)$  là  $y = ax + b$ . Tính giá trị biểu thức  $T = 10^a + b$

**Lời giải**

Ta có độ dài một cạnh của mảnh vườn là  $x(m)$  nên độ dài cạnh còn lại của mảnh vườn là  $\frac{900}{x}(m)$ .

Ta có  $x \geq \frac{900}{x}$ . Suy ra,  $x \geq 30$ .

Ta có  $P(x) = 2\left(x + \frac{900}{x}\right) = 2x + \frac{1800}{x}$ .

Vì  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [P(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1800}{x} = 0$  nên đồ thị hàm số  $P(x)$  có tiệm cận xiên là đường thẳng  $y = 2x$ .

Suy ra  $a = 2, b = 0$ . Do vậy,  $T = 100$ .

- Câu 27. (VD)** Để thiết kế một bể cá hình hộp chữ nhật có chiều cao là 80 cm, thể tích là 12800 cm<sup>3</sup>. Người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70000 VNĐ/m<sup>2</sup> và loại kính để làm mặt đáy có giá thành 100000 VNĐ/m<sup>2</sup>. Gọi  $x$  là chiều dài của đáy bể cá với ( $x > 0, x(m)$ );  $f(x)$  là hàm số xác định chi phí để hoàn thành bể cá. Xác định các đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $f(x)$  .....

**Lời giải**

Gọi  $y$  là chiều rộng của đáy bể cá ( $y > 0, y(m)$ ).

Ta có:  $0,8xy = 0,0128 \Rightarrow y = \frac{0,016}{x}(m)$ .

Giá thành bể cá được xác định theo hàm số:

$$f(x) = 2 \cdot 0,8 \left( x + \frac{0,016}{x} \right) \cdot 70000 + 100000 \cdot x \cdot \frac{0,016}{x} \text{ (VNĐ)}$$

$$\Rightarrow f(x) = 112000 \left( x + \frac{0,016}{x} \right) + 1600 \text{ (VNĐ)}$$

$$\Rightarrow f(x) = 112000x + 1600 + \frac{1792}{x} \text{ (VNĐ)}.$$

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( 112000x + 1600 + \frac{1792}{x} \right) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (112000x + 1600)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1792}{x} = 0$$

Nên đồ thị hàm  $f(x)$  có tiệm cận đứng là  $x = 0$ ; tiệm cận xiên là  $y = 112000x + 1600$ .

- Câu 28. (VD)** Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích bằng 100 (m<sup>2</sup>). Biết chiều dài của mảnh vườn đó là  $x(m)$ , gọi chu vi của mảnh vườn là  $P(x)$ . Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $P(x)$ .

**Lời giải**

Đáp số: 2.

Ta có, chiều rộng của mảnh vườn là:  $\frac{100}{x}(m)$ .

Chu vi của mảnh vườn là:  $P(x) = 2\left(x + \frac{100}{x}\right) = 2x + \frac{200}{x}(m)$ .

Mặt khác, ta có:

$$\begin{aligned}
 &+ \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2x + \frac{200}{x} \right) = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 2x + \frac{200}{x} \right) = -\infty \text{ nên đồ thị hàm số } \\
 &P(x) \text{ không có tiệm cận ngang.} \\
 &+ \lim_{x \rightarrow 0^-} P(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( 2x + \frac{200}{x} \right) = -\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow 0^+} P(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( 2x + \frac{200}{x} \right) = +\infty \text{ nên đồ thị hàm số } \\
 &P(x) \text{ có tiệm cận đứng là } x = 0. \\
 &+ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [P(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( 2x + \frac{200}{x} - 2x \right) = 0 \text{ nên đồ thị hàm số } P(x) \text{ có tiệm cận xiên là } \\
 &y = 2x.
 \end{aligned}$$

- Câu 29. (VD)** Một bể chứa 5000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 30 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 25 lít / phút.
- a) Sau 1 phút, lượng muối bơm vào bể là 750 gam.
- b) Sau  $t$  phút, khối lượng muối trong bể là  $1500t$  gam.
- c) Gọi  $f(t)$  là hàm số mô tả nồng độ muối trong bể sau  $t$  phút. Khi đó đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó là  $y = 750$ .
- d) Khi thời gian  $t$  càng lớn thì nồng độ muối trong bể sẽ lớn hơn nồng độ muối ở trong nước bơm vào.

#### Lời giải

(a) Sau  $t$  phút, khối lượng muối trong bể là :  $25 \cdot 30 \cdot t = 750t$  (gam).  
Do đó sau 1 phút khối lượng muối trong bể là  $750 \cdot 1 = 750$  (gam). Vậy mệnh đề **đúng**.

(b) Từ câu (a) suy ra mệnh đề **sai**.

(c) Thể tích của lượng nước trong bể là  $5000 + 25t$ .

Vậy nồng độ muối sau  $t$  phút là  $f(t) = \frac{750t}{5000 + 25t} = \frac{30t}{200 + t}$  (gam/lít).

Ta có  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{200 + t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( 30 - \frac{6000}{200 + t} \right) = 30$ , suy ra tiệm cận ngang của đồ thị là  $y = 30$ . Do đó mệnh đề **sai**.

(d) Ta thấy  $\frac{30t}{200 + t} = 30 - \frac{6000}{200 + t} < 30 \forall t > 0$  và  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 30$  nên suy ra được khi  $t$  càng lớn thì nồng độ muối trong nước bể sẽ tiến dần đến 30 gam/lít, không thể lớn hơn 30 gam/lít. Do đó mệnh đề **sai**.

- Câu 30. (VD)** Để loại bỏ  $p\%$  một loài tảo độc ra khỏi một hồ nước, người ta ước tính chi phí bỏ ra là

$$C(p) = \frac{45p}{100 - p} \text{ (triệu đồng) với } 0 \leq p < 100.$$

a) Đồ thị của hàm số  $C(p)$  có tiệm cận đứng là đường thẳng  $p = 100$

b) Để loại bỏ 100% tảo độc ra khỏi hồ nước thì chi phí bỏ ra là không lớn.

c) Đồ thị của hàm số  $C(p)$  có tâm đối xứng là điểm  $I = \left( 100; \frac{45}{100} \right)$

d) Với điểm  $M$  bất kì thuộc đồ thị hàm số  $C(p)$  thì tích các khoảng cách từ điểm  $M$  đến hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $C(p)$  là 45.

#### Lời giải

(a) Ta có:  $\lim_{p \rightarrow 100^-} C(p) = \lim_{p \rightarrow 100^-} \frac{45p}{100 - p} = +\infty$

Suy ra: Đồ thị của hàm số  $C(p)$  có tiệm cận đứng là đường thẳng  $\Delta_1: p = 100$ .

Do đó mệnh đề **đúng**.

(b) Do  $\lim_{p \rightarrow 100^-} C(p) = \lim_{p \rightarrow 100^-} \frac{45p}{100-p} = +\infty$  nên khi  $p$  tiến đến 100 thì chi phí bỏ ra là  $C(p)$

tăng lên gần tới vô cùng. Suy ra để loại bỏ 100% tảo độc ra khỏi hồ nước thì chi phí bỏ ra là vô cùng lớn. Do đó mệnh đề **sai**.

(c) Ta có:  $\lim_{p \rightarrow +\infty} C(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{45p}{100-p} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{45}{-1 + \frac{100}{p}} = -45$

Suy ra: Đồ thị của hàm số  $C(p)$  có tiệm cận ngang là đường thẳng  $\Delta_2: c(p) = -45$ .

Đồ thị hàm số  $C(p)$  nhận giao điểm hai đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm tâm đối xứng. Suy ra tâm đối xứng của đồ thị  $C(p)$  là điểm  $I = (100; -45)$ . Do đó mệnh đề **sai**.

(d) Gọi  $M(p_0; C(p_0))$  là điểm bất kì thuộc đồ thị hàm số  $C(p)$ . Khoảng cách từ điểm  $M(p_0; C(p_0))$  đến 2 đường tiệm cận đứng  $\Delta_1$  và tiệm cận ngang  $\Delta_2$  được tính bởi công thức:

$$d(M; \Delta_1) = |p_0 - 100|;$$

$$d(M; \Delta_2) = \left| \frac{45p_0}{100-p_0} - (-45) \right| = \left| \frac{4500}{100-p_0} \right|.$$

$$\text{Khi đó: } d(M; \Delta_1) \cdot d(M; \Delta_2) = |p_0 - 100| \cdot \left| \frac{4500}{100-p_0} \right| = 4500$$

Với điểm  $M$  bất kì thuộc đồ thị hàm số  $C(p)$  thì tích các khoảng cách từ điểm  $M$  đến hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $C(p)$  là 4500.

Do đó mệnh đề **sai**.

**Câu 31. (VD)** Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hóa bằng hàm số  $f(t) = \frac{a}{b + e^{-0,75t}}$  trong đó thời gian  $t$  được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu  $t = 0$  quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào / giờ. Theo mô hình này, với quần thể nấm men lâu dài thì số lượng tế bào tăng không vượt quá bao nhiêu.

**Lời giải**

**Đáp án: 100**

$$\text{Ta có: } f'(t) = \frac{0,75ae^{-0,75t}}{(b + e^{-0,75t})^2}, t \geq 0$$

$$\text{Theo bài ra thì } \begin{cases} f(0) = 20 \\ f'(0) = 12 \end{cases} \text{ nên ta có hệ } \begin{cases} \frac{a}{b+1} = 20 \\ \frac{0,75a}{(b+1)^2} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 20(b+1) \\ \frac{15}{b+1} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 25 \\ b = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó ta có } f'(t) = \frac{18,75e^{-0,75t}}{\left(\frac{1}{4} + e^{-0,75t}\right)^2} > 0, t \geq 0 \text{ tức là số lượng quần thể nấm men luôn luôn tăng.}$$

$$\text{Tuy nhiên, } \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25}{\frac{1}{4} + e^{-0,75t}} = 100 \text{ nên số lượng quần thể nấm men tăng nhưng không}$$

vượt quá 100 tế bào

**Câu 32. (VD)** Chi phí xuất bản  $x$  cuốn tạp chí (bao gồm: Lương cán bộ, công nhân viên, giấy in,...) được cho bởi công thức  $C(x) = 0,001x^2 + 3x + 1000$ ,  $C(x)$  được tính theo đơn vị nghìn đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. Tổng chi phí (xuất bản và phát hành) cho  $x$  cuốn tạp chí là  $T(x)$ . Tỉ số  $M(x) = \frac{T(x)}{x}$  được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản  $x$  cuốn.  $a$  là số tiệm cận của đồ thị hàm số  $M(x)$  và  $b$  là số lượng tạp chí cần xuất bản sao cho chi phí trung bình là thấp nhất. Tính  $b - 10a$ .

**Lời giải**

Đáp số: 980.

Tổng chi phí cho  $x$  cuốn tạp chí là:  $T(x) = C(x) + 4x = 0,001x^2 + 7x + 1000$ .

Ta có:  $M(x) = 0,001x + \frac{1000}{x} + 7$  với  $x = 1, 2, \dots$  (6)

▪ Ta xét hàm số  $y = M(x)$  trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

+) Ta có:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (M(x) - 0,001x - 7) = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (M(x) - 0,001x - 7) = 0$ . Suy ra  $y = 0,001x + 7$  là tiệm cận xiên.

+) Ta có:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} M(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^-} M(x) = -\infty$ . Suy ra  $x = 0$  là tiệm cận đứng.

Vậy  $a = 2$

• Ta có:  $M(x) = 0,001x + \frac{1000}{x} + 7$  với  $x = 1, 2, \dots$  (6). Tìm GTNN của hàm số  $M$  trên  $(0; +\infty)$

Ta có:  $M'(x) = 0,001 - \frac{1000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1000$

BBT

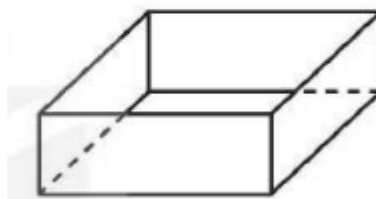
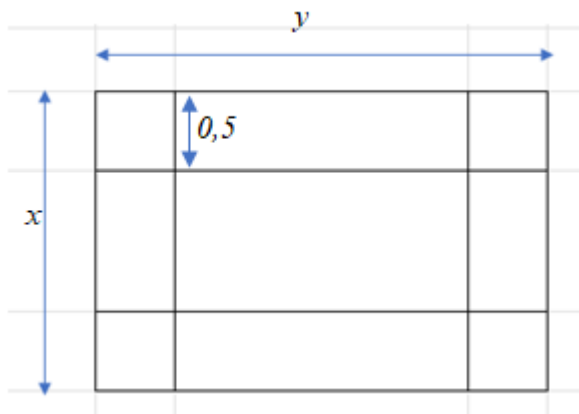
|         |   |       |           |
|---------|---|-------|-----------|
| $x$     | 0 | 1000  | $+\infty$ |
| $M'(x)$ |   | -     | +         |
| $M(x)$  |   | ↘ 9 ↗ |           |

Suy ra  $\min_{(0; +\infty)} M(x) = M(1000) = 9$

Vậy chi phí trung bình cho  $x$  cuốn tạp chí thấp nhất khi  $x = 1000$  (cuốn). chi phí cho mỗi cuốn khi đó là 9 nghìn đồng 9000 (đồng). Khi đó  $b = 1000$

Vậy  $b - 10a = 1000 - 20 = 980$ .

**Câu 33. (VD)** Từ một tấm tôn hình chữ nhật có các kích thước là  $x(m)$ ,  $y(m)$  với  $x > 1$  và  $y > 1$  và diện tích bằng  $4m^2$ , người ta cắt bốn hình vuông bằng nhau ở bốn góc rồi gập thành một cái thùng dạng hình hộp chữ nhật không nắp (như hình vẽ) có chiều cao bằng  $0,5m$ . Thể tích của thùng là hàm số  $V(x)$  trên khoảng  $(1; +\infty)$ . Đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{V(x)}$  có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

**Lời giải**

Do tấm tôn có diện tích bằng  $4m^2$  nên  $xy = 4 \Leftrightarrow y = \frac{4}{x}$

Thùng có chiều cao là 0,5m và các kích thước còn lại của thùng là:  $x-1$  và  $y-1$

Thể tích của thùng là  $V(x) = 0,5 \cdot (x-1)(y-1) = \frac{1}{2}(x-1)\left(\frac{4}{x}-1\right) = \frac{1}{2} \frac{(x-1)(4-x)}{x}$

Suy ra:  $y = \frac{1}{V(x)} = \frac{2x}{(x-1)(4-x)}$

Ta có:  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{V(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{(x-1)(4-x)} = +\infty$  và  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{V(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{(x-1)(4-x)} = -\infty \Rightarrow$  đường

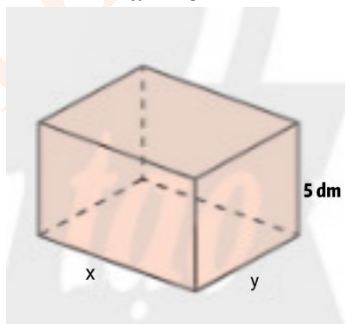
thẳng  $x=1$  là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{V(x)}$

$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{V(x)} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x}{(x-1)(4-x)} = -\infty$  và  $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{V(x)} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2x}{(x-1)(4-x)} = +\infty \Rightarrow$  đường thẳng

$x=4$  là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{V(x)}$

Vậy đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{V(x)}$  có 2 đường tiệm cận đứng.

- Câu 34. (VD)** Người ta muốn làm một cái bể dạng hình hộp chữ nhật không nắp (như hình vẽ) có thể tích bằng  $1m^3$ . Chiều cao của bể là  $5dm$ , các kích thước khác là  $x(m)$ ,  $y(m)$  với  $x > 0$  và  $y > 0$ . Diện tích toàn phần của bể (không kể nắp) là hàm số  $S(x)$  trên khoảng  $(0; +\infty)$ . Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $S(x)$  là đường thẳng  $y = ax + b$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = a^2 + b^2$ .

**Lời giải**

Do thể tích của bể là  $1m^3$  nên  $0,5xy = 1 \Leftrightarrow xy = 2$

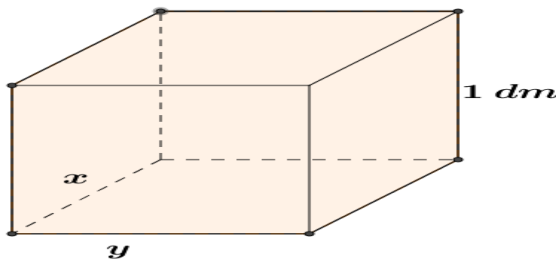
Diện tích toàn phần của bể là  $S(x) = xy + 2.0,5.x + 2.0,5.y = 2 + x + \frac{2}{x}$ , ( $x > 0$ )

Ta có:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (S(x) - (x + 2)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$

Suy ra đồ thị hàm số  $S(x)$  có đường tiệm cận xiên là  $y = x + 2 \Rightarrow a = 1; b = 2$

$$P = a^2 + b^2 = 5$$

**Câu 35. (VD)** Người ta muốn làm một cái bể dạng hình hộp chữ nhật không nắp (như hình vẽ) có thể tích bằng  $5m^3$ . Chiều cao của bể là  $10dm$ , các kích thước khác là  $x(m)$ ,  $y(m)$  với  $x > 0$  và  $y > 0$ . Diện tích toàn phần của bể (không kể nắp) là hàm số  $S(x)$  trên khoảng  $(0; +\infty)$ . Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $S(x)$  là đường thẳng  $y = ax + b$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = a^2 + b^2$ .



#### Lời giải

Do thể tích của bể là  $1m^3$  nên  $1.xy = 5 \Leftrightarrow xy = 5$

Diện tích toàn phần của bể là  $S(x) = xy + 2.1.x + 2.1.y = 5 + 2x + \frac{10}{x}$ , ( $x > 0$ )

Ta có:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (S(x) - (5 + 2x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10}{x} = 0$

Suy ra đồ thị hàm số  $S(x)$  có đường tiệm cận xiên là  $y = 2x + 5 \Rightarrow a = 2; b = 5$

$$P = a^2 + b^2 = 2^2 + 5^2 = 29$$

**Câu 36. (VD)** Một mảnh đất hình thang vuông có đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ, có diện tích là  $S = 24(m^2)$ . Gọi  $x(m)$  là độ dài đáy nhỏ và  $P(x)$  là chu vi mảnh đất đó. Tìm số tiệm cận của  $P(x)$ .

#### Lời giải

Gọi  $x$  là độ dài đáy nhỏ của hình thang ( $x > 0$ ). Ta có :

Đáy lớn là  $2x$ .

Chiều cao của hình thang là  $h = \frac{2S}{x + 2x} = \frac{16}{x}$ .

Độ dài cạnh còn lại của hình thang là  $\sqrt{x^2 + \left(\frac{16}{x}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}}$ .

Khi đó  $P(x) = x + \frac{16}{x} + 2x + \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} = 3x + \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} + \frac{16}{x}$  (tập xác định  $D = (0; +\infty)$ ).

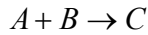
Do  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 3x + \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} + \frac{16}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ 3 + \sqrt{1 + \frac{256}{x^4}} + \frac{16}{x^2} \right] = +\infty$  nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

+  $\lim_{x \rightarrow 0^+} P(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left[ 3x^2 + \sqrt{x^4 + 256} + 16 \right] = +\infty$  nên đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là trục  $Oy$

$$+ \lim_{x \rightarrow +\infty} (P(x) - 4x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} - x + \frac{16}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{256}{x^2 \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} + x} + \frac{16}{x^2} \right] = 0.$$

Khi đó đồ thị hàm số có 1 tiệm cận xiên  $y = 4x$ .

Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.

**DẠNG 5: KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ ỨNG DỤNG THỰC TẾ****Câu 1.** (TH) Xét phản ứng hoá học tạo ra chất  $C$  từ hai chất  $A$  và  $B$ .Giả sử nồng độ của hai chất  $A$  và  $B$  bằng nhau  $[A] = [B] = a \text{ (mol/l)}$ . Khi đó nồng độ củachất  $C$  theo thời gian  $t (t > 0)$  được cho bởi công thức:  $[C] = \frac{a^2 Kt}{aKt + 1} \text{ (mol/l)}$ , trong đó  $K$  là

hằng số dương (Nguồn: Đỗ Đức Thái (Chủ biên) và các đồng tác giả. Giáo trình Phép tính vi tích phân hàm một biến). NXB Đại học Sư phạm, 2023).

**a)** Tìm tốc độ phản ứng ở thời điểm  $t > 0$ .**b)** Chứng minh rằng nếu  $x = [C]$  thì  $x'(t) = K(a - x)^2$ .**c)** Nêu hiện tượng xảy ra với nồng độ các chất khi  $t \rightarrow +\infty$ .**d)** Nêu hiện tượng xảy ra với tốc độ phản ứng khi  $t \rightarrow +\infty$ .**Lời giải**Ban đầu  $a \quad a \quad 0$ Sau thời gian  $t \quad a - \frac{a^2 Kt}{aKt + 1} \quad a - \frac{a^2 Kt}{aKt + 1} \quad \frac{a^2 Kt}{aKt + 1}$ Tốc độ phản ứng ở thời điểm  $t > 0 \quad v(t) = \frac{\Delta C_C}{\Delta t} = \frac{\frac{a^2 Kt}{aKt + 1}}{t} = \frac{a^2 K}{aKt + 1}$ .**(b)** Ta có  $x = [C]$  tức là  $x = \frac{a^2 Kt}{aKt + 1}$ 

$$x'(t) = \frac{a^2 K(aKt + 1) - a^2 Kt \cdot aK}{(aKt + 1)^2} = \frac{a^2 K}{(aKt + 1)^2}$$

$$K(a - x)^2 = K\left(a - \frac{a^2 Kt}{aKt + 1}\right)^2 = \frac{a^2 K}{(aKt + 1)^2}$$

Suy ra  $x'(t) = K(a - x)^2$ .**(c)** Ta có  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(a - \frac{a^2 Kt}{aKt + 1}\right) = 0$  và  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^2 Kt}{aKt + 1}\right) = a$ .Suy ra khi  $t \rightarrow +\infty$  thì nồng độ của các chất  $A$  và  $B$  dần tới 0, nồng độ của chất  $C$  dần tới  $a$ .**(d)** Ta có  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^2 K}{aKt + 1}\right) = 0$  suy ra khi  $t \rightarrow +\infty$  thì tốc độ phản ứng dần tới 0.**Câu 2.** (VD) Một cốc chứa 20 ml dung dịch KOH (Potassium Hydroxide) với nồng độ 100 mg/ml và một bình chứa dung dịch KOH khác với nồng độ 10 mg/ml. Lấy  $x$  (ml) ở bình trộn vào cốc ta được dung dịch KOH có nồng độ  $C(x)$ . Coi  $C(x)$  là hàm số xác định với  $x \geq 0$ . Khi  $x \in [5; 15]$ , nồng độ của dung dịch KOH đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu mg/ml?**Lời giải****Trả lời:** 82 mg/mlTrong 20 ml dung dịch KOH với nồng độ 100 mg/ml chứa  $20 \cdot 100 = 2000$  mg KOH.Trong  $x$  ml dung dịch KOH với nồng độ 10 mg/ml chứa  $x \cdot 10 = 10x$  mg KOH.Dung dịch KOH có nồng độ là:  $C(x) = \frac{10x + 2000}{x + 20}$ .

Ta có  $C(x) = \frac{10x + 2000}{x + 20}$  xác định trên đoạn  $[5; 15]$ .

$$C'(x) = \frac{200 - 2000}{(x + 20)^2} < 0, \forall x \in [5; 15].$$

Suy ra hàm số nghịch biến trên đoạn  $[5; 15]$ .

Vậy  $\max_{[5; 15]} C(x) = C(5) = 82 \text{ mg/ml}$ .

**Câu 3. (VD)** Một vật được làm nóng đến  $u_0 = 100^\circ\text{C}$  và sau đó được làm mát trong phòng có nhiệt độ không khí là  $T = 30^\circ\text{C}$ . Nhiệt độ của vật được làm mát tại một thời điểm  $t$  (tính bằng phút) có thể được mô hình hóa bằng công thức sau:  $u(t) = T + (u_0 - T)e^{kt}$  với  $k$  là hằng số.

Các mệnh đề sau đúng hay sai ?

a) Nhiệt độ  $u(t)$  của vật tại thời điểm  $t$  là  $u(t) = 30 + 70e^{kt}$ .

b) Nếu hằng số  $k = -0,05$  thì nhiệt độ của vật sau 10 phút gần bằng  $60^\circ\text{C}$ .

c) Nếu nhiệt độ của vật là  $80^\circ\text{C}$  sau 5 phút thì hằng số  $k$  có giá trị gần bằng  $-0,0673$ .

d) Nếu nhiệt độ của vật là  $80^\circ\text{C}$  sau 5 phút thì nhiệt độ của vật sau 18 phút gần bằng  $51^\circ\text{C}$ .

**Lời giải**

(a) Nhiệt độ  $u(t)$  của vật tại thời điểm  $t$  là

$$u(t) = T + (u_0 - T)e^{kt} = 30 + (100 - 30)e^{kt} = 30 + 70e^{kt}. \text{ Chọn đúng.}$$

(b) Nếu hằng số  $k = -0,05$  thì nhiệt độ của vật sau 10 phút là

$$30 + 70e^{-0,05 \cdot 10} \approx 72,5^\circ\text{C}. \text{ Chọn sai.}$$

(c) Nếu nhiệt độ của vật là  $80^\circ\text{C}$  sau 5 phút thì  $80 = 30 + 70e^{5k} \Leftrightarrow k \approx 0,0673$ .

Chọn đúng.

(d) Nếu nhiệt độ của vật là  $80^\circ\text{C}$  sau 5 phút thì  $80 = 30 + 70e^{5k} \Leftrightarrow e^k = \sqrt[5]{\frac{5}{7}}$

Nhiệt độ của vật sau 18 phút là  $30 + 70e^{18k} \approx 51^\circ\text{C}$ . Chọn đúng.

**Câu 4. (VD)** Một tàu đổ bộ tiếp cận Mặt Trăng theo cách tiếp cận thẳng đứng và đốt cháy các tên lửa hãm ở độ cao 250 km so với bề mặt của Mặt Trăng.

Trong khoảng 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao  $h$  của con tàu so với bề mặt của Mặt Trăng được tính (gần đúng) bởi hàm  $h(t) = -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t + 250$ , trong đó  $t$  là thời gian tính bằng giây và  $h$  là độ cao tính bằng kilômét (Nguồn: #A.Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma-1, Conrnelsen 2016)

a) Con tàu đạt khoảng cách 70 km so với bề mặt của Mặt Trăng tại thời điểm  $t = 30$  (s).

b) Gọi  $v(t)$  làm hàm vận tốc tức thời kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, với  $0 \leq t \leq 50$  (đơn vị trên trục hoành là 10 giây, đơn vị trên trục tung là 10 km). Từ giây thứ 37 trở đi, vận tốc của tàu giảm dần.

c) Trong khoảng thời gian từ giây thứ 18 đến giây thứ 32 đầu tiên, độ cao của con tàu giảm dần so với bề mặt của Mặt Trăng.

d) Trong quá trình tiếp cận, tàu đổ bộ cách mặt đất thấp nhất là khoảng 8,07 (km).

**Lời giải**

(a) Đúng

$$h(t) = 70 \Leftrightarrow -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t + 250 = 70$$

$$\Leftrightarrow -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t - 180 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 30 \\ t \simeq 8,34 \end{cases}$$

(b) Đúng

$$v(t) = -0,03t^2 + 2,2t - 30$$

$$v'(t) = -0,06t + 2,2$$

$$v'(t) = 0 \Leftrightarrow -0,06t + 2,2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{110}{3}$$

Bảng biến thiên của  $v(t)$ 

|         |     |                 |    |
|---------|-----|-----------------|----|
| $t$     | 0   | $\frac{110}{3}$ | 50 |
| $v'(t)$ | +   | 0               | -  |
| $v(t)$  | -30 | $\frac{31}{3}$  | 5  |

Từ giây thứ 37 trở đi, vận tốc của con tàu giảm dần.

(c) Sai

$$h'(t) = -0,03t^2 + 2,2t - 30$$

$$h'(t) = 0 \Rightarrow -0,03t^2 + 2,2t - 30 = 0 \Rightarrow t \simeq 18,11$$

Bảng biến thiên của  $h(t)$ 

|         |     |       |     |
|---------|-----|-------|-----|
| $t$     | 0   | 18,11 | 50  |
| $h'(t)$ | +   | 0     | -   |
| $h(t)$  | 250 | 8,07  | 250 |

(d) Đúng

$$v(t) = 0 \Rightarrow -0,03t^2 + 2,2t - 30 = 0 \Rightarrow t \simeq 18,11 \text{ (s)}$$

$$h(0) = 250; h(50) = 250; h(18,11) \simeq 8,07$$

Vậy: tàu đổ bộ cách mặt đất thấp nhất khoảng 8,07 (km).

**Câu 5. (VD)** Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B. Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hằng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là  $x$  tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là

$P(x) = 45 - 0,001x^2$  (triệu đồng). Cho phí để  $A$  sản xuất  $x$  tấn sản phẩm trong một tháng là  $C(x) = 100 + 30x$  triệu đồng (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

- a) Chi phí để  $A$  sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.  
 b) Số tiền  $A$  thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho  $B$  là 600 triệu đồng.  
 c) Lợi nhuận mà  $A$  thu được khi bán  $x$  tấn sản phẩm ( $0 \leq x \leq 100$ ) cho  $B$  là  $H(x) = -0,001x^3 + 15x - 100$ .  
 d)  $A$  bán cho  $B$  khoảng 70,7 tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

### Lời giải

(a) Chi phí để  $A$  sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là  $C(10) = 100 + 30 \cdot 10 = 400$  triệu đồng. Do đó (a) đúng.

(b) Số tiền  $A$  thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho  $B$  là  $R(10) = 10 \cdot P(10) = 10 \cdot (45 - 0,001 \cdot 10^2) = 449$  triệu đồng. Do đó (b) sai.

(c) Lợi nhuận mà  $A$  thu được là:  
 $H(x) = R(x) - C(x) = xP(x) - C(x) = P(x) = 45x - 0,001x^3 - (100 + 30x) = -0,001x^3 + 15x - 100$ .  
 Do đó (c) đúng.

(d) Xét hàm số  $H(x) = -0,001x^3 + 15x - 100$ , ( $0 \leq x \leq 100$ ) ta có  $H'(x) = -0,003x^2 + 15$ ,  
 $H'(x) = 0 \Leftrightarrow -0,003x^2 + 15 = 0 \Leftrightarrow x = 50\sqrt{2}$  (chọn).

Ta có  $H(0) = -100$ ;  $H(50\sqrt{2}) = 500\sqrt{2} - 100$ ;  $H(100) = 400$ .

Vậy  $A$  bán cho  $B$  khoảng  $50\sqrt{2} \approx 70,7$  tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất bằng  $H(50\sqrt{2}) = 500\sqrt{2} - 100$ . Do đó (d) đúng.

### Câu 6.

(VD) Chi phí nhiên liệu của một chiếc tàu chạy trên sông được chia làm hai phần. Phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 nghìn đồng trên 1 giờ. Phần thứ hai tỉ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi  $v = 10$  (km/giờ) thì phần thứ hai bằng 30 nghìn đồng/giờ. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Khi vận tốc  $v = 10$  (km/giờ) thì chi phí nhiên liệu cho phần thứ nhất trên 1 km đường sông là 48000 đồng.  
 b) Hàm số xác định tổng chi phí nhiên liệu trên 1 km đường sông với vận tốc  $x$  (km/h) là  $f(x) = \frac{480}{x} + 0,03x^3$ .  
 c) Khi vận tốc  $v = 30$  (km/giờ) thì tổng chi phí nhiên liệu trên 1 km đường sông là 43000 đồng.  
 d) Vận tốc của tàu để tổng chi phí nhiên liệu trên 1 km đường sông nhỏ nhất là  $v = 20$  (km/giờ).

### Lời giải

(a) Đúng.

Thời gian tàu chạy quãng đường 1km là:  $\frac{1}{10}$  (giờ)

Chi phí tiền nhiên liệu cho phần thứ nhất là:  $\frac{1}{10} \cdot 480000 = 48000$ . (đồng).

(b) Sai

Gọi  $x$  (km/h) là vận tốc của tàu,  $x > 0$

Thời gian tàu chạy quãng đường 1km là:  $\frac{1}{x}$  (giờ)

+) Chi phí tiền nhiên liệu cho phần thứ nhất là:  $\frac{1}{x} \cdot 480 = \frac{480}{x}$ . (ngàn đồng)

+) Hàm chi phí cho phần thứ hai là  $p = kx^3$  (ngàn đồng/ giờ)

Mà khi  $x = 10 \Rightarrow p = 30 \Rightarrow k = 0,03$ . Nên  $p = 0,03x^3$  (ngàn đồng/ giờ)

Do đó chi phí phần 2 để chạy 1 km là:  $\frac{1}{x} \cdot 0,03x^3 = 0,03x^2$ . (ngàn đồng)

Vậy tổng chi phí:  $f(x) = \frac{480}{x} + 0,03x^2$ .

(c) Đúng

Tổng chi phí:  $f(x) = \frac{480}{x} + 0,03x^2$ .

Thay  $x = v = 30$  (km/giờ) vào ta có  $f(30) = \frac{480}{30} + 0,03 \cdot 30^2 = 43$  (ngàn đồng).

(d) Đúng

$f(x) = \frac{480}{x} + 0,03x^2 = \frac{240}{x} + \frac{240}{x} + 0,03x^2 \geq 3\sqrt[3]{1728} = 36$ .

Dấu "=" xảy ra khi  $x = 20$ .

**Câu 7. (VD)** Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao (mét) của một vật thể sau thời gian  $t$  giây được phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất 5 mét với tốc độ ban đầu 39,2 m/s là  $h(t) = 5 + 39,2t - 4,9t^2$ , chọn chiều dương là chiều hướng từ dưới lên. (theo Vật lý đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016).

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Vận tốc của vật sau 3 giây là 4,6 m/s.

b) Vật đạt độ cao lớn nhất bằng 83,4 mét tại thời điểm  $t = 4$  giây.

c) Khoảng thời gian vật ở độ cao trên 10 mét dài hơn 7 giây.

d) Vận tốc của vật lúc vật chạm đất sắp xấp xỉ  $-40,43$  (m/s)

**Lời giải**

(a) Sai

Vận tốc của vật tại thời điểm  $t$  giây là  $v(t) = h'(t) = 39,2 - 9,8t$ .

Vận tốc của vật sau 3 giây là  $v(3) = 9,8$  m/s.

(b) Đúng

Vì  $h(t)$  là hàm số bậc hai có hệ số  $a = -4,9 < 0$  nên  $h(t)$  đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm

$t = -\frac{b}{2a} = \frac{39,2}{2 \cdot 4,9} = 4$  (giây). Khi đó độ cao lớn nhất của vật là  $h(4) = 83,4$  (m).

(c) Đúng

Vật ở độ cao trên 10 mét khi  $h(t) > 10 \Leftrightarrow -4,9t^2 + 39,2t - 5 > 0 \Leftrightarrow \frac{28 - \sqrt{734}}{7} < t < \frac{28 + \sqrt{734}}{7}$ .

Khoảng thời gian vật ở độ cao trên 10 mét dài  $\frac{28 + \sqrt{734}}{7} - \frac{28 - \sqrt{734}}{7} = \frac{2\sqrt{734}}{7} \approx 7,74$  (giây)

(d) Đúng

Vật chạm đất khi độ cao bằng 0, tức là

$$h(t) = 0 \Leftrightarrow -4,9t^2 + 39,2t + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{28 + \sqrt{834}}{7} (tm \ t > 0) \\ t = \frac{28 - \sqrt{834}}{7} (ktm \ t > 0) \end{cases}$$

Khi đó vận tốc của vật là  $v\left(\frac{28 + \sqrt{834}}{7}\right) \approx -40,43 (m/s)$ .

Vận tốc của vật âm chứng tỏ chiều chuyển động của vật ngược chiều dương của trục đã chọn.

**Câu 8. (VD)** Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách là  $300km$ . Vận tốc của dòng nước là  $6km/h$ . Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là  $v(km/h)$  thì năng lượng tiêu hao của cá trong  $t$  giờ được cho bởi công thức  $E(v) = cv^3t$ . Trong đó  $c$  là một hằng số,  $E$  được tính bằng *jun*. Tìm vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất..

**Đáp án:**.....  $9km/h$

**Lời giải**

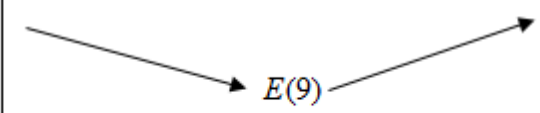
Vận tốc của cá bơi khi ngược dòng là:  $v - 6 (km/h)$ .

Thời gian để cá bơi vượt khoảng cách  $300km$  là  $t = \frac{300}{v-6}$ .

Năng lượng tiêu hao của cá để vượt khoảng cách đó là:

$$E(v) = cv^3 \cdot \frac{300}{v-6} = 300c \cdot \frac{v^3}{v-6} (jun), v > 6.$$

$$E'(v) = 600cv^2 \frac{v-9}{(v-6)^2} \Leftrightarrow E'(v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 (loai) \\ v = 9 \end{cases}$$

|         |                                                                                     |       |           |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------|-----------|
| $v$     | 6                                                                                   | 9     | $+\infty$ |
| $E'(v)$ |                                                                                     | - 0 + |           |
| $E(v)$  |  |       |           |

$$\Rightarrow E_{\min} \Leftrightarrow v = 9 km/h.$$

**Câu 9. (TH)** Khi máu di chuyển từ tim qua các động mạch chính rồi đến các mao mạch và quay trở lại qua các tĩnh mạch, huyết áp tâm thu ( tức là áp lực của máu lên động mạch khi tim co bóp) liên tục giảm xuống. Giả sử một người có huyết áp tâm thu  $P$  ( được tính bằng mmHg) được cho bởi hàm số:

$$P(t) = \frac{25t^2 + 125}{t^2 + 1}, 0 \leq t \leq 10$$

Trong đó  $t$  là thời gian được tính bằng giây. Tốc độ thay đổi của huyết áp sau 8 giây kể từ khi máu rời tim giảm bao nhiêu mmHg?

Trả lời:  $\frac{64}{169} \approx 0,38 (mmHg)$

**Lời giải**

Tốc độ thay đổi của huyết áp sau  $t$  giây là:

$$P'(t) = \frac{50t \cdot (t^2 + 1) - (25t^2 + 125) \cdot 2t}{(t^2 + 1)^2} = \frac{-200t}{(t^2 + 1)^2} \leq 0, \forall 0 \leq t \leq 10$$

$\Rightarrow P(t)$  nghịch biến trên đoạn  $[0;10]$

Ta có:  $P'(8) = \frac{-200.8}{(8^2 + 1)^2} = \frac{-64}{169}$

Tốc độ thay đổi của huyết áp sau 8 giây kể từ khi máu rời tim là giảm  $\frac{64}{169} \approx 0,38$  (mmHg).

**Câu 10. (VD)** Một rạp chiếu phim có sức chứa 800 người, trung bình mỗi ngày rạp có khoảng 360 khách với giá mỗi vé là 100.000đ. Nếu giá mỗi vé giảm 10.000đ thì mỗi ngày rạp có thêm 60 khách đến xem. Hỏi cần giảm giá vé đến bao nhiêu nghìn đồng để doanh thu của rạp là lớn nhất.

**Đáp số: 80**

**Lời giải**

Gọi  $x$  là giá tiền một vé,  $y$  là số người mua vé tương ứng.

Ta có giá tiền tỉ lệ nghịch với số người mua vé nên  $y = ax + b$

Khi  $x = 100$  thì  $y = 360$ , Khi  $x = 90$  thì  $y = 420$  nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 100a + b = 360 \\ 90a + b = 420 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = 960 \end{cases}$$

Hay  $y = -6x + 960$ .

Doanh thu của rạp chiếu phim là  $T(x) = xy = x(-6x + 960) = -6x^2 + 960x$  với  $0 < x \leq 100$

$$T' = -12x + 960 = 0 \Leftrightarrow x = 80$$

BBT

|      |   |    |       |
|------|---|----|-------|
| $x$  | 0 | 80 | 100   |
| $T'$ |   | +  | 0     |
|      |   |    | -     |
| $T$  |   |    | 38400 |

Vậy khi giá vé là 80.000đ thì doanh thu của Rạp là lớn nhất.

**Câu 11. (VD)** Một công ty chuyên sản xuất dụng cụ thể thao nhận được đơn đặt hàng sản xuất 8000 quả bóng rổ. Công ty có một số máy móc, mỗi máy có khả năng sản xuất 30 bóng rổ trong một giờ. Chi phí thiết lập mỗi máy là 200 nghìn đồng. Sau khi thiết lập, quá trình sản xuất sẽ diễn ra hoàn toàn tự động và chỉ cần có người giám sát. Chi phí trả cho người giám sát là 192 nghìn đồng mỗi giờ. Công ty cần sử dụng bao nhiêu máy móc để chi phí hoạt động đạt mức thấp nhất?

**Lời giải**

**Đáp án: 16.**

Gọi số máy móc công ty sử dụng để sản xuất là  $x$  ( $x \in \mathbb{N}$ ,  $x > 0$ ).

Thời gian cần để sản xuất hết 8000 quả bóng rổ là:  $\frac{8000}{30x}$ .

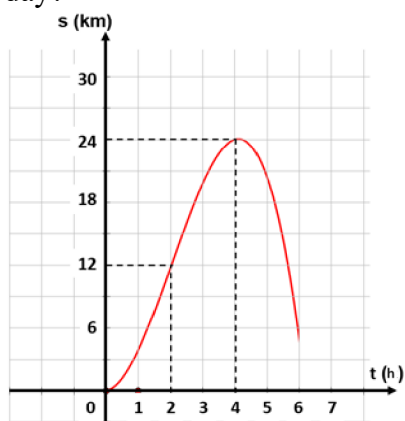
Tổng chi phí để sản xuất là:  $P(x) = 200x + \frac{8000}{30x} \cdot 192 = 200x + \frac{51200}{x}$

$$\text{Ta có: } P'(x) = 200 - \frac{51200}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 256 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ x = -16(L) \end{cases}$$

|         |   |    |           |   |
|---------|---|----|-----------|---|
| $x$     | 0 | 16 | $+\infty$ |   |
| $P'(x)$ |   | -  | 0         | + |
| $P(x)$  |   |    | 6400      |   |

Vậy công ty nên sử dụng 16 máy để chi phí hoạt động là thấp nhất.

- Câu 12.** (VD) Thầy Hiếu tham dự giải “Đi bộ trực tuyến Ngành Giáo dục và Đào tạo Edu Run-HCMC” năm 2024. Quãng đường thầy Hiếu đi được biểu diễn bằng hàm số  $s(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$  (với  $a \neq 0$ ) có đồ thị như hình bên. (trong đó  $t$  là thời gian tính bằng giờ,  $s$  là quãng đường tính bằng km). Khi đó, vận tốc tối đa của thầy Hiếu đạt được trong quá trình đi bộ thuộc khoảng nào sau đây?



- A. (8;9).      B. (9;10).      C. (7;9).      **D. (8;10).**

**Lời giải**

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số đi qua các điểm:  $O(0;0)$ ,  $A(2;12)$ ,  $B(4;24)$  và nhận  $B(4;24)$  làm 1 cực trị.

Ta có:  $s(t) = at^3 + bt^2 + ct + d \Rightarrow s'(t) = 3at^2 + 2bt + c$

$$\text{Khi đó ta có hệ sau: } \begin{cases} s(0) = 0 \\ s(2) = 12 \\ s(4) = 24 \\ s'(4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ 8a + 4b + 2c + d = 12 \\ 64a + 16b + 4c + d = 24 \\ 48a + 8b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = \frac{9}{2} \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

$$\text{Nên: } s(t) = -\frac{3}{4}t^3 + \frac{9}{2}t^2 \Rightarrow v(t) = s'(t) = -\frac{9}{4}t^2 + 9t.$$

$$\text{Thầy Hiếu dừng đi bộ khi: } v(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{9}{4}t^2 + 9t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 4 \end{cases}$$

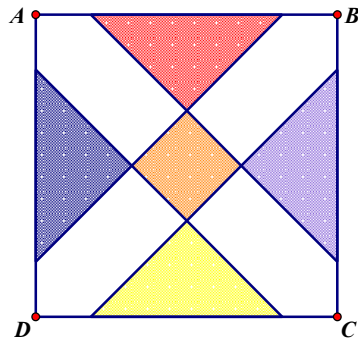
Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của  $v(t)$  trên  $[0;4]$ .

$$\text{Ta có: } v'(t) = -\frac{9}{2}t + 9 \Rightarrow v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

$$\text{Khi đó: } v(0) = 0, \quad v(2) = 9, \quad v(4) = 0$$

Vậy vận tốc lớn nhất mà thầy Hiếu đạt được là 9 km/h tại thời điểm  $t = 2$ .

**Câu 13. (VD)** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng 4, chính giữa có một hình vuông đồng tâm với  $ABCD$ . Biết rằng bốn tam giác là bốn tam giác cân. Hỏi tổng diện tích của hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ nhất bằng bao nhiêu?



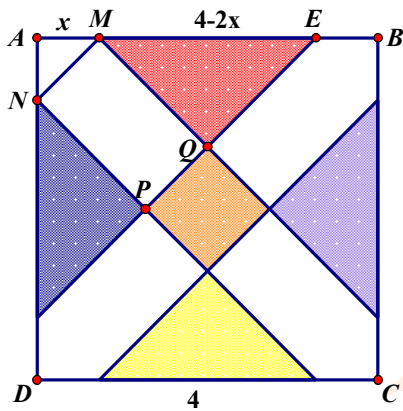
A.  $\frac{19}{3}$ .

B.  $\frac{17}{3}$ .

C.  $\frac{16}{3}$ .

D.  $\frac{14}{3}$ .

Lời giải



Đặt  $AM = x$  ( $0 < x < 4$ )  $\Rightarrow ME = 4 - 2x$ ,  $MN = x\sqrt{2}$

$$2MQ^2 = ME^2 = (4 - 2x)^2$$

Gọi  $S$  tổng diện tích của hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ.

$$S = 4 \cdot \frac{MQ^2}{2} + PQ^2 = 2MQ^2 + MN^2 = (4 - 2x)^2 + (x\sqrt{2})^2 = 6x^2 - 16x + 16$$

$$S' = 12x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

Bảng biến thiên

|      |   |                |   |
|------|---|----------------|---|
| $x$  | 0 | $\frac{4}{3}$  | 4 |
| $S'$ | - | 0              | + |
| $S$  |   | $\frac{16}{3}$ |   |

Vậy  $S_{\min} = \frac{16}{3}$

**Câu 14. (VD)** Bạn A có một đoạn dây mềm và dẻo không đàn hồi  $20\text{ m}$ , bạn chia đoạn dây thành hai phần, phần đầu gấp thành một tam giác đều. Phần còn lại gấp thành một hình vuông. Hỏi độ dài phần đầu bằng bao nhiêu ( $m$ ) để tổng diện tích hai hình trên là nhỏ nhất?

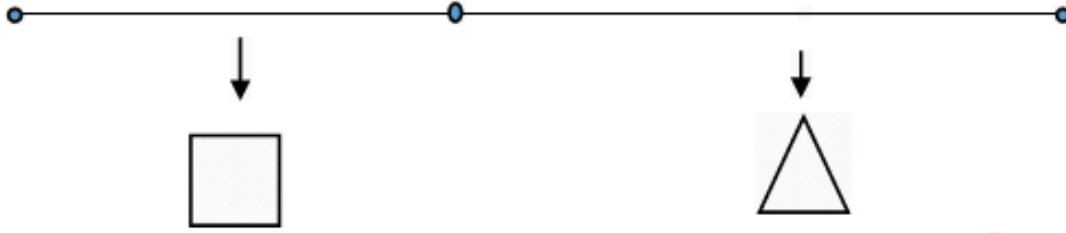
A.  $\frac{120}{9+4\sqrt{3}} m.$

B.  $\frac{40}{9+4\sqrt{3}} m.$

C.  $\frac{180}{9+4\sqrt{3}} m.$

D.  $\frac{60}{9+4\sqrt{3}} m.$

Lời giải



Gọi  $x$  (m) là cạnh của tam giác đều,  $\left(0 < x < \frac{20}{3}\right)$ .

Suy ra cạnh hình vuông là  $\frac{20-3x}{4}$  (m).

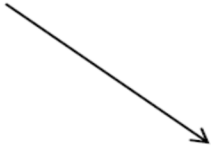
Gọi  $S$  là tổng diện tích của hai hình.

$$S(x) = x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{20-3x}{4}\right)^2.$$

$$\text{Ta có : } S'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 2 \cdot \frac{20-3x}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right).$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x + 2 \cdot \frac{20-3x}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{60}{9+4\sqrt{3}}.$$

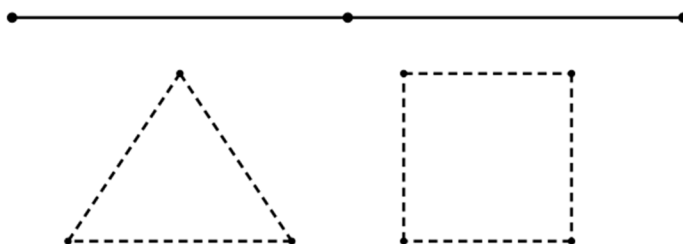
Bảng biến thiên

| $x$     | 0 | $\frac{60}{9+4\sqrt{3}}$                                                            | $\frac{20}{3}$                                                                       |
|---------|---|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| $S'(x)$ |   | -      0      +                                                                     |                                                                                      |
| $S(x)$  |   |  |  |

Dựa vào bảng biến thiên,  $S$  đạt giá trị nhỏ nhất tại  $x = \frac{60}{9+4\sqrt{3}} m.$

Vậy độ dài phần đầu là  $\frac{180}{9+4\sqrt{3}} m.$

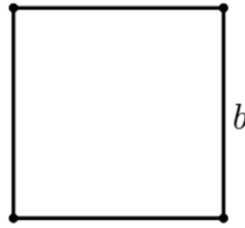
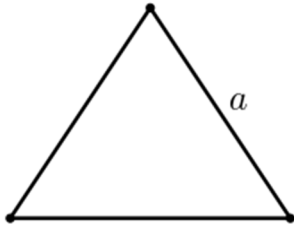
**Câu 15. (VD)** Cắt một đoạn dây dài 60 m thành hai đoạn dây, đoạn dây thứ nhất gấp thành một tam giác đều có diện tích  $S_1$ , đoạn dây thứ hai gấp thành một hình vuông có diện tích  $S_2$  (như hình vẽ dưới)



Khi đó giá trị nhỏ nhất của tổng  $T = S_1 + S_2$  là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần mười) ?

**Lời giải**

Gọi độ dài đoạn dây gấp tam giác đều là  $x$  thì độ dài đoạn dây gấp hình vuông là  $60 - x$  (mét)



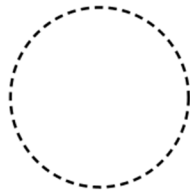
$$\text{Khi đó } x = 3a \Leftrightarrow a = \frac{x}{3} \Rightarrow S_1 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{36}$$

$$\text{Mặt khác: } 60 - x = 4b \Rightarrow b = \frac{60 - x}{4} \Rightarrow S^2 = b^2 = \left( \frac{60 - x}{4} \right)^2$$

$$\text{Khi đó } S_1 + S_2 = \frac{x^2 \sqrt{3}}{36} + \left( \frac{60 - x}{4} \right)^2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{(9 + 4\sqrt{3})x^2 - 1080x + 32400}{144}$$

$$\text{Dễ dàng tính được } (S_1 + S_2)_{\min} = \min f(x) = f\left(\frac{540}{9 + 4\sqrt{3}}\right) \approx 97,9 (\text{m}^2).$$

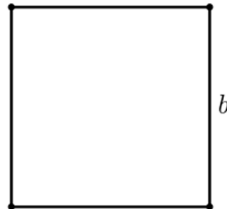
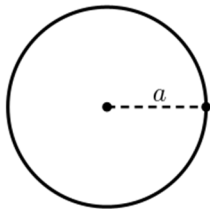
**Câu 16. (VD)** Cắt một đoạn dây dài 30m thành hai đoạn dây, đoạn dây thứ nhất gấp thành một đường tròn có diện tích  $S_1$ , đoạn dây thứ hai gấp thành một hình vuông có diện tích  $S_2$  (như hình vẽ dưới)



Khi đó giá trị nhỏ nhất của tổng  $T = S_1 + S_2$  là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần mười) ?

**Lời giải**

Gọi độ dài đoạn dây gấp đường tròn là  $x$  thì độ dài đoạn dây gấp hình vuông là  $30 - x$  (mét)



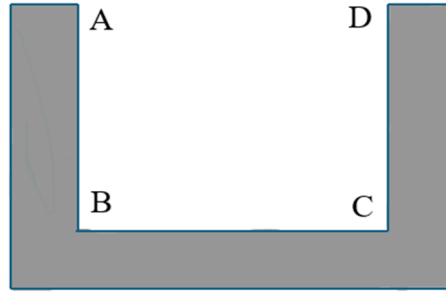
$$\text{Khi đó } x = 2\pi a \Leftrightarrow a = \frac{x}{2\pi} \Rightarrow S_1 = \pi a^2 = \frac{x^2}{4\pi}$$

$$\text{Mặt khác: } 30 - x = 4b \Rightarrow b = \frac{30 - x}{4} \Rightarrow S^2 = b^2 = \left( \frac{30 - x}{4} \right)^2$$

$$\text{Khi đó } S_1 + S_2 = \frac{x^2}{4\pi} + \left( \frac{30 - x}{4} \right)^2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{(\pi + 4)x^2 - 60\pi x + 900\pi}{16\pi}$$

Dễ dàng tính được  $(S_1 + S_2)_{\min} = \min f(x) = f\left(\frac{30\pi}{\pi + 4}\right) \approx 31,5(\text{m}^2)$ .

- Câu 17. (VD)** Hình dưới đây là mương dẫn nước thủy lợi tại một địa phương phục vụ tưới tiêu cho ruộng đồng. Phần không gian trong mương để nước chảy có mặt cắt ngang là hình chữ nhật  $ABCD$ . Với điều kiện lưu lượng nước qua mương cho phép thì diện tích mặt cắt  $ABCD$  là  $0,48\text{m}^2$ . Để đảm bảo yêu cầu kỹ thuật tốt nhất cho mương, người ta cần thiết kế sao cho tổng độ dài  $T = AB + BC + CD$  là ngắn nhất. Khi đó chiều rộng đáy mương bằng bao nhiêu (biết chiều rộng phải dưới  $1\text{m}$ , làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



- A.  $0,78(\text{m})$ .      B.  $0,97(\text{m})$ .      C.  $0,98(\text{m})$ .      D.  $0,83(\text{m})$ .

**Lời giải**

Đặt  $BC = x(\text{m})$ ,  $0 < x < 1$ . Theo đề bài, ta có  $AB \cdot BC = 0,48 \Rightarrow AB = \frac{0,48}{BC} = \frac{0,48}{x}$ .

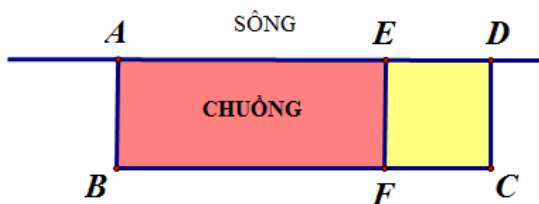
$$T = f(x) = AB + BC + CD = x + 2 \cdot AB = x + \frac{0,96}{x}.$$

$$f'(x) = 1 - \frac{0,96}{x^2}. \text{ Khi đó } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 0,96 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{6}}{5} \approx 0,98(\text{m}).$$

|         |           |                       |                 |   |
|---------|-----------|-----------------------|-----------------|---|
| $x$     | 0         | $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ | 1               |   |
| $f'(x)$ |           | -                     | 0               | + |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $\frac{4\sqrt{6}}{5}$ | $\frac{49}{25}$ |   |

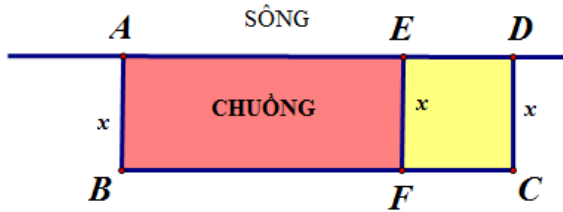
Vậy chiều rộng đáy mương  $BC = 0,98(\text{m})$  thỏa ycbt.

- Câu 18. (VD)** Một chủ trang trại nuôi gia cầm muốn làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) thành hai chuồng hình chữ nhật sát nhau, một chuồng nuôi vịt và một chuồng nuôi gà. Biết rằng chủ trang trại đã có sẵn  $240\text{m}$  hàng rào. Hỏi diện tích lớn nhất có thể bao quanh chuồng là bao nhiêu?



**Lời giải**

**Đáp số:** 4800



Xét hình chữ nhật  $ABCD$  như hình vẽ, đặt  $AB = x (x > 0)$ .

Khi đó  $BC = 240 - 3x > 0 \Rightarrow x < 80$ .

Diện tích hình chữ nhật  $ABCD$  là  $S = x(240 - 3x) = 240x - 3x^2$ .

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $S(x) = 240x - 3x^2$  với  $0 < x < 80$ .

Xét

$$S(x) = 240x - 3x^2 = -3(x^2 - 80x + 1600) + 4800 = -3(x - 40)^2 + 4800 \geq 4800, \forall x \in (0; 80).$$

Vậy diện tích lớn nhất có thể bao quanh là  $4800 m^2$  khi  $AB = x = 40$ .

**Câu 19. (VD)** Cho 200 gam dung dịch muối nồng độ 10%, giả sử thêm vào dung dịch  $x$  (gam) muối tinh khiết và được dung dịch có nồng độ được biểu diễn bởi hàm số  $f(x)(\%)$ .

a) Hàm số  $f(x) = \frac{100(x + 10)}{x + 200}$ .

b) Đạo hàm của hàm số  $f(x)$  luôn nhận giá trị âm trên khoảng  $(0; +\infty)$

c) Thêm càng nhiều gam muối tinh khiết thì nồng độ phần trăm càng tăng nhưng nồng độ không vượt quá 100%.

d) Để nồng độ muối của dung dịch đạt 25% cần thêm vào 50 gam muối.

**Lời giải:**

| Câu 1 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|-------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a) S  | <p>Trong 200 gam dung dịch muối nồng độ 10% lúc đầu, khối lượng muối tinh khiết là: <math>\frac{200 \cdot 10}{100} = 20(g)</math> Khi thêm vào dung dịch <math>x</math> (gam) muối tinh khiết, khối lượng muối là <math>20 + x</math></p> <p>Khi thêm vào dung dịch <math>x</math> (gam) muối tinh khiết, khối lượng dung dịch là <math>200 + x</math></p> <p>Nồng độ muối là: <math>f(x) = \frac{100(x + 20)}{x + 200}(\%)</math></p> |
| b) S  | <p>Đạo hàm của hàm số:</p> $f'(x) = \frac{200 \cdot 100 - 20 \cdot 100}{(x + 200)^2} = \frac{1800}{(x + 200)^2} > 0 \quad \forall x > 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| c) Đ  | <p>Do đạo hàm <math>f'(x) &gt; 0 \quad \forall x &gt; 0</math></p> <p>Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng <math>(0; +\infty)</math></p> <p>Suy ra khi thêm vào càng nhiều muối thì nồng độ phần trăm càng tăng.</p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 100$ <p>Nên nồng độ không thể bằng hoặc vượt 100%</p>                                                                                                                         |

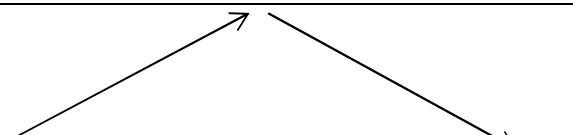
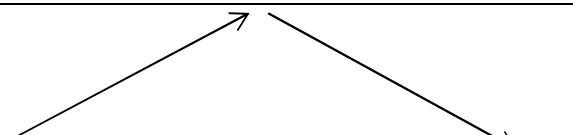
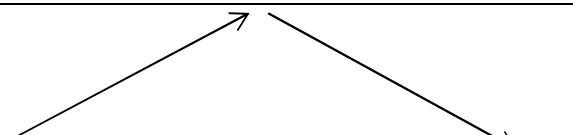
|      |                                                                                                  |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|
| d) S | Khi thêm vào 50 gam muối, nồng độ dung dịch là<br>$f(50) = \frac{100(50 + 20)}{50 + 200} = 28\%$ |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Câu 20. (VD)** Người ta tiêm một loại thuốc vào mạch máu ở cánh tay phải của một bệnh nhân. Sau thời gian là  $t$  giờ, nồng độ thuốc hấp thu trong máu của bệnh nhân đó được xác định theo công thức

$$C(t) = \frac{0,28t}{t^2 + 4} \quad (0 < t < 24).$$

- a) Sau 20 giờ, nồng độ hấp thu thuốc trong máu của bệnh nhân  $C(20) = 0,014$ .  
b) Nồng độ thuốc hấp thu trong máu của bệnh nhân luôn tăng trong 3 giờ đầu sau khi tiêm.  
c) Nồng độ thuốc hấp thu trong máu của bệnh nhân luôn giảm sau 2 giờ đầu sau khi tiêm.  
d) Nồng độ thuốc trong máu bệnh nhân cao nhất là 0,07.

**Lời giải:**

|         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |     |            |         |           |        |                                                                                      |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|------------|---------|-----------|--------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| a) S    | Sau 20 giờ, nồng độ hấp thu thuốc trong máu của bệnh nhân<br>$C(20) = \frac{0,28.20}{20^2 + 4} = \frac{7}{505}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |     |            |         |           |        |                                                                                      |
| (b) S   | Xét hàm số $C(t) = \frac{0,28t}{t^2 + 4}$ trên $(0; 24)$ , có<br>$C'(t) = \frac{0,28(t^2 + 4) - 0,28t.2t}{(t^2 + 4)^2} = \frac{-0,28t^2 + 1,12}{(t^2 + 4)^2}$<br>$C'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{-0,28t^2 + 1,12}{(t^2 + 4)^2} = 0$<br>$\Leftrightarrow t = 2$ <table><tr><td><math>t</math></td><td>0   2   24</td></tr><tr><td><math>C'(t)</math></td><td>+   0   -</td></tr><tr><td><math>C(t)</math></td><td></td></tr></table> | $t$ | 0   2   24 | $C'(t)$ | +   0   - | $C(t)$ |  |
| $t$     | 0   2   24                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |     |            |         |           |        |                                                                                      |
| $C'(t)$ | +   0   -                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |     |            |         |           |        |                                                                                      |
| $C(t)$  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |     |            |         |           |        |                                                                                      |
| c) Đ    | Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số nghịch biến trên $(2; 24)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |     |            |         |           |        |                                                                                      |
| d) Đ    | Suy ra $\max_{(0;24)} C(t) = C(2) = 0,07$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |     |            |         |           |        |                                                                                      |

**Câu 21. (VD)** Bác An có một mảnh đất ruộng và muốn dành ra một khu đất hình chữ nhật có diện tích  $242 m^2$  để trồng cây thuốc. Bác dự kiến rào quanh ba cạnh của khu đất hình chữ nhật này bằng lưới thép, cạnh còn lại (chiều dài) sẽ tận dụng bức tường có sẵn. Biết chiều rộng khu đất không vượt quá  $16 m$ . Hỏi chiều rộng của khu đất bằng bao nhiêu để tổng chiều dài lưới thép cần dùng là ngắn nhất (nghĩa là chi phí rào lưới thép thấp nhất)?

**Lời giải**

Gọi chiều rộng khu đất hình chữ nhật cần rào là  $x(m)$ ,  $0 < x \leq 16$ .

Diện tích khu đất này là  $242 m^2$  nên chiều dài của khu đất là  $\frac{242}{x} (m)$

Tổng chiều dài lưới thép rào quanh khu đất hình chữ nhật là  $2x + \frac{242}{x}$  (m)

Xét hàm số  $y = 2x + \frac{242}{x}$ ,  $x \in (0; 16]$

Ta có  $y' = 2 - \frac{242}{x^2} = \frac{2x^2 - 242}{x^2}$  và  $y' = 0 \Rightarrow 2x^2 - 242 = 0 \Rightarrow x = 11$  (do  $x \in (0; 16]$ )

Ta có  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( 2x + \frac{242}{x} \right) = +\infty$ ;  $y(11) = 44$ ;  $y(16) = \frac{377}{8}$

Bảng biến thiên

|      |           |    |                 |
|------|-----------|----|-----------------|
| $x$  | 0         | 11 | 16              |
| $y'$ | -         | 0  | +               |
| $y$  | $+\infty$ | 44 | $\frac{377}{8}$ |

Dựa vào bảng biến thiên, chiều dài lưới thép ngắn nhất là 44m khi chiều rộng khu đất là 11m

**Câu 22. (VD)** Một bể ban đầu chứa 150 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 50 lít nước, đồng thời cho vào bể 20 gam chất khử trùng ( hòa tan) . Đặt  $f(t)$  gam/lít là nồng độ chất khử trùng trong bể sau  $t$  phút ( $t \geq 0$ ) , biết rằng sau khi khảo sát sự biến thiên của hàm số  $f(t)$  , ta thấy giá trị  $f(t)$  tăng theo  $t$  nhưng không vượt ngưỡng  $p$  gam/lít. Tìm số  $p$  ( kết quả thể hiện dưới dạng số thập phân) .

**A.**  $p = 0,4$  .

**B.**  $p = 0,3$  .

**C.**  $p = 0,2$  .

**D.**  $p = 0,1$  .

**Lời giải**

Sau  $t$  phút, trong bể chứa  $(50t + 150)$  lít nước và  $20t$  gam chất khử trùng.

Suy ra nồng độ chất khử trùng trong bể sau  $t$  phút là  $f(t) = \frac{20t}{50t + 150}$  gam/lít.

Khảo sát sự biến thiên hàm số  $f(t) = \frac{20t}{50t + 150}$ ,  $t \geq 0$ .

Ta có:  $f'(t) = \frac{3000}{(50t + 150)^2} > 0, \forall t \geq 0$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{20t}{50t + 150} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{20}{50 + \frac{150}{t}} = \frac{2}{5} = 0,4$

Bảng biến thiên

|         |   |           |
|---------|---|-----------|
| $t$     | 0 | $+\infty$ |
| $f'(t)$ |   | +         |
| $f(t)$  | 0 | 0,4       |

Dựa vào BBT ta thấy giá trị  $f(t)$  tăng theo  $t$  nhưng không vượt ngưỡng 0,4 gam/lít.

Vậy  $p = 0,4$ .

- Câu 23. (VD)** Một cốc chứa 25 ml dung dịch  $NaOH$  với nồng độ 100 mg/ml. Một bình chứa dung dịch  $NaOH$  khác với nồng độ 9 mg/ml được trộn vào cốc. Gọi  $C(x)$  là nồng độ của  $NaOH$  sau khi trộn  $x$  (ml) từ bình chứa, ta thấy nồng độ của  $NaOH$  trong cốc sẽ luôn giảm theo  $x$  nhưng luôn lớn hơn một số  $a$ . Tính  $a$ ?

**Lời giải**

**Đáp án:** 9 mg/ml.

Tổng khối lượng của  $NaOH$  sau khi trộn  $x$  (ml) là:  $25 \cdot 100 + 9x = 2500 + 9x$  (mg)

Tổng thể tích của dung dịch sau khi trộn là:  $25 + x$ .

Ta có  $C(x) = \frac{2500 + 9x}{25 + x}; x \geq 0$ .

Ta có TXĐ của hàm số là  $D = [0; +\infty)$

Có  $C'(x) = \frac{9 \cdot (25 + x) - (2500 + 9x)}{(25 + x)^2} = \frac{-2275}{(25 + x)^2} < 0, \forall x \in D$

Lại có  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2500 + 9x}{25 + x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2500}{x} + 9}{\frac{25}{x} + 1} = 9$

Do đó nồng độ  $NaOH$  luôn giảm nhưng luôn lớn hơn 9 mg/ml.

- Câu 24. (VD)** Giả sử chi phí cho xuất bản  $x$  cuốn tạp chí (gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in,...) được cho bởi công thức:

$$C(x) = 0,0001x^2 - 0,2x + 10000,$$

trong đó  $C(x)$  được tính theo đơn vị là vạn đồng (1 vạn đồng = 10000 đồng). Chi phí phát

hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. Tỉ số  $M(x) = \frac{T(x)}{x}$  được gọi là chi phí trung bình cho một

cuốn tạp chí khi xuất bản  $x$  cuốn và tổng chi phí  $T(x)$  (xuất bản và phát hành) cho  $x$  cuốn tạp chí. Tìm chi phí trung bình thấp nhất cho một cuốn tạp chí là bao nhiêu vạn đồng, biết rằng nhu cầu hiện tại xuất bản không quá 30000 cuốn?

**Lời giải**

**Đáp án: 2,2**

Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng, tức là 0,4 vạn đồng.

Suy ra chi phí phát hành cho  $x$  cuốn là  $0,4x$  (vạn đồng).

Theo đề bài, ta có tổng chi phí xuất bản và phát hành cho  $x$  cuốn tạp chí là:

$$T(x) = C(x) + 0,4x = 0,0001x^2 + 0,2x + 10000, \text{ với } x > 0.$$

$$\text{Ta có } f(x) = M(x) = \frac{T(x)}{x} = 0,0001x + 0,2 + \frac{10000}{x}.$$

Xét hàm số  $f(x) = 0,0001x + 0,2 + \frac{10000}{x}$ , với  $0 < x \leq 30000$ .

$$f'(x) = 0,0001 - \frac{10000}{x^2} = \frac{0,0001x^2 - 10000}{x^2};$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10000 \text{ (do } x > 0).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

Bảng biến thiên:

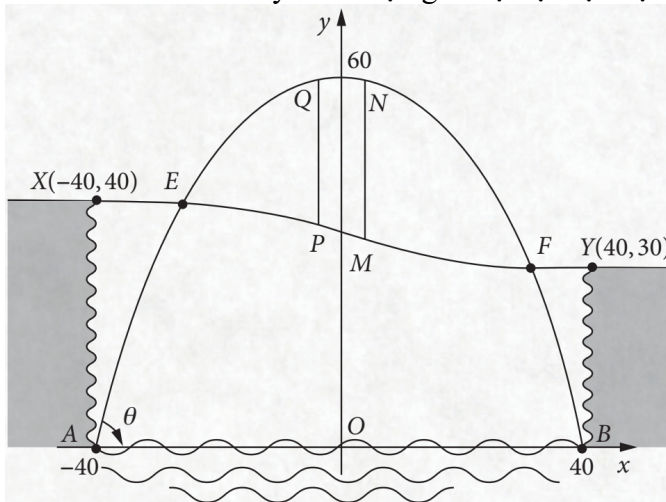
|         |           |       |            |            |
|---------|-----------|-------|------------|------------|
| $x$     | 0         | 10000 | 30000      |            |
| $f'(x)$ |           | -     | 0          | +          |
| $f(x)$  | $+\infty$ |       | $f(10000)$ | $f(30000)$ |

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy giá trị của  $M(x)$  nhỏ nhất khi  $x = 10000$ .

Do đó, số lượng tạp chí cần xuất bản sao cho chi phí trung bình thấp nhất là  $x = 10000$  (cuốn)

Vậy chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản 10000 cuốn là:  $M(10000) = 2,2$  (vạn đồng).

**Câu 25. (VD)** Một thành phố nằm trên một con sông chảy qua hẻm núi. Hẻm có chiều ngang 80m, một bên cao 40 m và một bên cao 30 m. Một cây cầu sẽ được xây dựng bắc qua sông và hẻm núi. Sơ đồ thiết kế của cây cầu được gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ dưới đây.



Con đường  $XY$  xuyên qua hẻm núi được mô hình hóa bằng phương trình:  $y = \frac{x^3}{25600} - \frac{3x}{16} + 35$

Hai cột đỡ dọc  $MN$  và  $PQ$  ( song song với trục  $Oy$  ) là đoạn nối giữa khung của Parabol và đường  $XY$ . Tính tổng độ dài đoạn  $MN$  và  $PQ$  biết rằng  $N$  và  $Q$  là hai điểm đối xứng qua  $Oy$ ;  $MN$  là đoạn có độ dài lớn nhất ( làm tròn kết quả đến hàng phần chục ).

**Lời giải**

**Đáp án: 49,5**

Theo bài ra ta có: phương trình của Parabol là  $y = 60 - \frac{3}{80}x^2$ .

Khoảng cách giữa khung Parabol và đường xuyên núi là:

$$D = 60 - \frac{3}{80}x^2 - \left( \frac{x^3}{25600} - \frac{3x}{16} + 35 \right) \text{ với } x \in (-23,71; 27,99)$$

$$\text{Xét } D' = -\frac{3}{40}x - \frac{3x^2}{25600} + \frac{3}{16} = 0 \Leftrightarrow x = 2,49$$

Bảng biến thiên:

|       |                                                                                                                                                                                                                        |      |       |
|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|-------|
| x     | -23,71                                                                                                                                                                                                                 | 2,49 | 27,99 |
| D'(x) | +                                                                                                                                                                                                                      | 0    | -     |
| D(x)  | <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">0</div> <div style="text-align: center;">25,23</div> <div style="text-align: center;">0</div> </div> |      |       |

Dựa vào bảng biến thiên,  $MN$  là đoạn có độ dài lớn nhất khi  $x = 2,49$

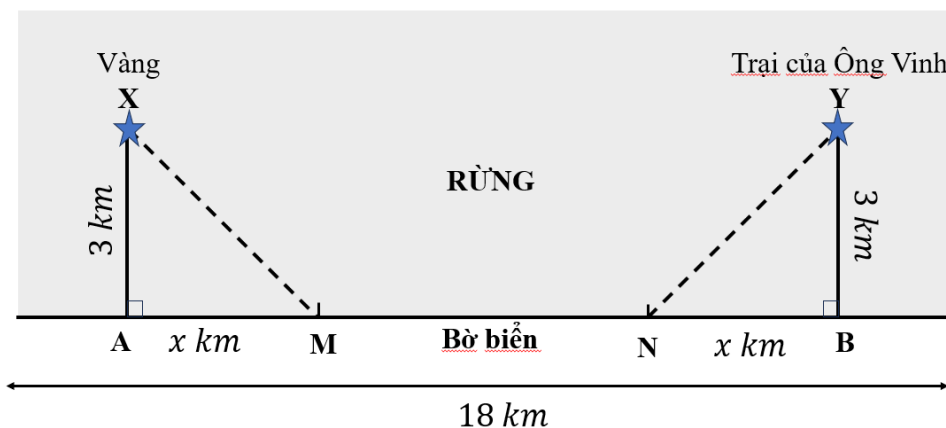
$$\Rightarrow MN = D_{MN} = 60 - \frac{3}{80} \cdot 2,49^2 - \left( \frac{2,49^3}{25600} - \frac{3 \cdot 2,49}{16} + 35 \right) \approx 25,23$$

Vì  $N$  và  $Q$  là hai điểm đối xứng qua  $Oy \Rightarrow x_{PQ} \approx -2,49$

$$\Rightarrow PQ = D_{PQ} = 60 - \frac{3}{80} \cdot 2,49^2 - \left( \frac{-2,49^3}{25600} - \frac{3 \cdot -2,49}{16} + 35 \right) \approx 24,3$$

Tổng độ dài  $MN + PQ = 49,5$ .

**Câu 26. (VD)** Ông Vinh đang ở trong rừng để đào vàng. Anh ta tìm thấy vàng ở  $X$ , cách điểm  $A$ : 3 km. Điểm  $A$  nằm trên đường bờ biển (đường bờ biển là đường thẳng). Trại của Ông Vinh nằm ở  $Y$ , cách điểm  $B$ : 3 km. Điểm  $B$  cũng thuộc đường bờ biển. Biết rằng  $AB = 3$  km,  $AM = NB = x$  km và  $AX = BY = 3$  km. (Như hình vẽ sau)



Khi đang đào vàng, Ông Vinh bị rắn cắn, chất độc lan vào máu. Sau khi bị cắn, nồng độ chất độc trong máu tăng theo thời gian được tính theo phương trình

$$y = 50 \log(t + 2)$$

Trong đó,  $y$  là nồng độ,  $t$  là thời gian tính bằng giờ sau khi bị rắn cắn.

Ông Vinh cần quay trở lại trại để lấy thuốc giải độc. Ông ấy chạy trong rừng và trên bãi biển với vận tốc lần lượt là 5 km/h và 13 km/h.

Để về đến trại Ông Vinh cần chạy từ trong rừng qua điểm  $M, N$  trên bãi biển.

Tính nồng độ chất độc trong máu thấp nhất khi ông Vinh về đến trại (làm tròn đáp án đến hàng phần chục).

**Lời giải**

**Đáp án: 32,6**

Để nồng độ chất độc trong máu thấp nhất khi thời gian di chuyển về đến trại thấp nhất.

Vậy nên Quỹ đường ông Vinh di chuyển về đến trại phải thấp nhất.

Quỹ đường của Ông Vinh

Theo bài ra ta có: ông Vinh sẽ đi qua các quỹ đường  $XM + MN + NY$ .

Ta có:  $XM = NY = \sqrt{9+x^2}$ ;  $MN = 18-2x$

Thời gian Ông Vinh chạy đến Trại nghỉ là:  $T(x) = 2\left(\frac{\sqrt{9+x^2}}{5} + \frac{9-x}{13}\right)$  với  $x \in (0;9)$

Xét  $T'(x) = 2\left(\frac{\sqrt{9+x^2}}{5} + \frac{9-x}{13}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$  (thỏa mãn)

Bảng biến thiên:

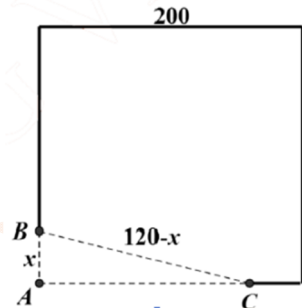
| x       | 0                | $\frac{5}{4}$    | 9                      |
|---------|------------------|------------------|------------------------|
| $T'(x)$ | —                | 0                | +                      |
| $T(x)$  | $\frac{168}{65}$ | $\frac{162}{65}$ | $\frac{6\sqrt{10}}{5}$ |

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy giá trị của  $T(x)$  nhỏ nhất khi  $x = \frac{5}{4}$ .

$$\Rightarrow \min_{x \in (0,9)} T(x) = T\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{162}{65}$$

Vậy, nồng độ chất độc trong máu thấp nhất là  $\min_{(0,+\infty)} y = 50 \log\left(\frac{162}{65} + 2\right) \approx 32,6$

**Câu 27. (VD)** Cho một tấm gỗ hình vuông cạnh  $200cm$ . Người ta cắt một tấm gỗ có hình một tam giác vuông  $ABC$  từ tấm gỗ hình vuông đã cho như hình vẽ sau. Biết  $AB = x(cm)$  ( $0 < x < 60$ ) là một cạnh góc vuông của tam giác  $ABC$  và tổng độ dài cạnh góc vuông  $AB$  với cạnh huyền  $BC$  bằng  $120 cm$ . Tìm  $x$  để tam giác  $ABC$  có diện tích lớn nhất.



- A.  $x = 50cm$ .      B.  $x = 30cm$ .      C.  $x = 40cm$ .      D.  $x = 20cm$ .

**Lời giải**

Độ dài cạnh huyền  $BC = 120 - x$ .

Khi đó độ dài cạnh  $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(120-x)^2 - x^2} = \sqrt{14400 - 240x}$ .

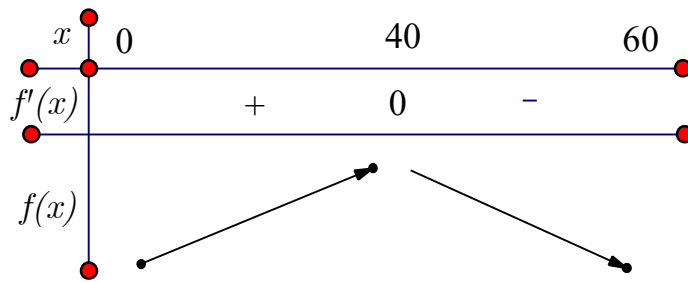
Diện tích tam giác  $ABC$  là:  $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} x \sqrt{14400 - 240x}$  ( $cm^2$ )

Xét hàm số  $f(x) = x \sqrt{14400 - 240x}$  với  $0 < x < 60$ .

Ta có:  $f'(x) = \sqrt{14400 - 240x} - \frac{120x}{\sqrt{14400 - 240x}} = \frac{14400 - 360x}{\sqrt{14400 - 240x}}$ ;

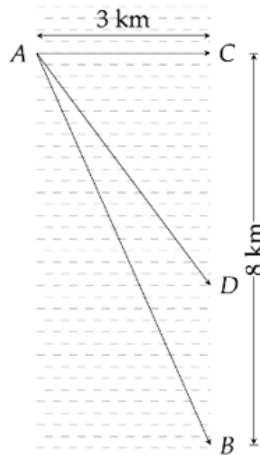
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 40 \in (0;60)$

Bảng biến thiên



Vậy tam giác  $ABC$  có diện tích lớn nhất khi  $AB = 40 \text{ cm}$ .

**Câu 28. (VD)** Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí  $A$  tới điểm  $B$  về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km (như hình vẽ).



Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến  $C$  và sau đó chạy đến  $B$ , hay có thể chèo trực tiếp đến  $B$ , hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm  $D$  giữa  $C$  và  $B$  và sau đó chạy đến  $B$ . Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h, chạy 8 km/h và quãng đường  $BC = 8 \text{ km}$ . Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Gọi  $x \text{ (km)}$  là độ dài quãng đường  $BD$ . Xét tính đúng sai trong các khẳng định sau:

a)  $8 - x \text{ (km)}$  là độ dài quãng đường  $CD$ .

b) Thời gian chèo thuyền trên quãng đường  $AD$  là:  $\frac{\sqrt{x^2 + 9}}{3}$  (giờ)

c) Tổng thời gian di chuyển từ  $A$  đến  $B$  là  $\frac{\sqrt{x^2 + 9}}{3} + \frac{8 - x}{8}$

d) Khoảng 1 giờ 20 phút là khoảng thời gian ngắn nhất để người đàn ông đến  $B$ .

**Lời giải**

a – Đúng, b – Sai, c – sai, d – đúng

(a) Đúng: Gọi  $x \text{ (km)}$  là độ dài quãng đường  $BD$ ;  $8 - x \text{ (km)}$  là độ dài quãng đường  $CD$ .

(b) Sai: Thời gian chèo thuyền trên quãng đường  $AD = \sqrt{x^2 + 9}$  là:  $\frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6}$  (giờ)

Thời gian chạy trên quãng đường  $DB$  là:  $\frac{8 - x}{8}$  (giờ)

(c) Sai: Tổng thời gian di chuyển từ  $A$  đến  $B$  là  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{8 - x}{8}$

Xét hàm số  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{8 - x}{8}$  trên khoảng  $(0; 8)$

Ta có  $f'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{8}$ ;  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+9} = 4x \Leftrightarrow x = \frac{9}{\sqrt{7}}$

Bảng biến thiên

|         |               |              |                          |                       |
|---------|---------------|--------------|--------------------------|-----------------------|
| $x$     | 0             | $9/\sqrt{7}$ | 8                        |                       |
| $f'(x)$ |               | −            | 0                        | +                     |
| $f(x)$  | $\frac{3}{2}$ |              | $1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$ | $\frac{\sqrt{73}}{6}$ |

(d) Đúng: Dựa vào bảng biến thiên ta thấy thời gian ngắn nhất để di chuyển từ  $A$  đến  $B$  là  $1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$ . Vậy khoảng thời gian ngắn nhất để người đàn ông đến  $B$  là  $1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1^h 20'$ .

**Câu 29. (VD)** Một sợi dây có chiều dài  $28m$  được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài (theo đơn vị mét) của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

**Lời giải**

Gọi chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông là  $x (m)$  ( $0 < x < 28$ )  
thì chiều dài của đoạn dây làm thành hình tròn là  $28 - x (m)$

+) Diện tích hình vuông là:  $\left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}$ .

+) Bán kính hình tròn là:  $R = \frac{28-x}{2\pi}$ .

Do đó, diện tích hình tròn là:  $\pi R^2 = \pi \cdot \left(\frac{28-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{784-56x+x^2}{4\pi}$ .

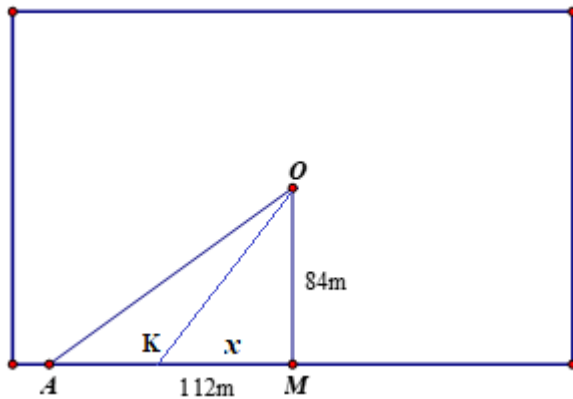
Khi đó Tổng diện tích hai hình là:  $\frac{x^2}{16} + \frac{784-56x+x^2}{4\pi} = \left(\frac{\pi+4}{16\pi}\right)x^2 - \frac{14}{\pi}x + \frac{196}{\pi}$ .

Xét hàm số bậc hai  $f(x) = \left(\frac{\pi+4}{16\pi}\right)x^2 - \frac{14}{\pi}x + \frac{196}{\pi}$ .

Nhận thấy  $f(x)$  đạt giá trị nhỏ nhất tại  $x = \frac{-b}{2a} = \frac{14}{\pi} \cdot \frac{16\pi}{2(\pi+4)} = \frac{112}{\pi+4}$

Vậy chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông để tổng diện tích của hai hình đạt giá trị nhỏ nhất là  $\frac{112}{4+\pi} \approx 15,68(m)$ .

**Câu 30. (VD)** Gia đình bác Hùng có một ao cá hình chữ nhật. Để lắp đặt một hệ thống điện ra vị trí  $O$  ở giữa hồ bác dự định nối một đường dây điện từ vị trí  $A$  trên bờ hồ đến vị trí  $O$  ở giữa hồ (như hình vẽ). Biết khoảng cách ngắn nhất từ  $O$  đến bờ hồ là  $OM = 84m$ , khoảng cách từ  $A$  đến  $M$  là  $AM = 112m$ . Mỗi mét dây điện lắp đặt ở trên bờ có chi phí cả tiền công và tiền vật liệu là 25 200 đồng và mỗi mét dây điện lắp đặt ở dưới nước có chi phí cả tiền công và tiền vật liệu là 42 000 đồng.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Mệnh đề 1 [Mức độ 2] Nếu nối đường dây điện theo đường gấp khúc  $AM + MO$  thì chi phí lắp đặt đường dây điện bé hơn 6000000 đồng
- b) Mệnh đề 2 [Mức độ 3] Nếu chọn một vị trí  $K$  trên đoạn  $AM$  sao cho  $KM = x$  (với  $x$  thay đổi sao cho  $0 \leq x \leq 112$ ) sau đó nối đường dây điện theo đường gấp khúc  $AK + KO$  thì chi phí lắp đặt đường dây điện là một hàm số biến  $x$  và ta có hàm số là:  
 $f(x) = 25200(112 - x) + 42000\sqrt{x^2 + 84^2}$
- c) Mệnh đề 3 [Mức độ 3] Nếu chọn điểm  $K$  cách điểm  $A$  một khoảng bằng 63m sau đó nối đường dây điện theo đường gấp khúc  $AK + KO$  thì chi phí lắp đặt đường dây điện là thấp nhất.
- d) Mệnh đề 4 [Mức độ 3] Chi phí thấp nhất để lắp đặt đường dây điện là 5644800 đồng

#### Lời giải

Nếu nối đường dây điện theo đường gấp khúc  $AM + MO$  thì chi phí lắp đặt đường dây điện là  $112 \cdot 25200 + 84 \cdot 42000 = 6350400$  suy ra mệnh đề 1 sai.

Ta có  $AK = 112 - x$  và  $KO = \sqrt{x^2 + 84^2}$  suy ra chi phí lắp đặt đường dây điện theo đường gấp khúc  $AK + KO$  là  $f(x) = 25200(112 - x) + 42000\sqrt{x^2 + 84^2}$  suy ra mệnh đề 2 đúng

Chi phí nối đường dây điện theo đường gấp khúc  $AK + KO$  hàm số  $f(x) = 25200(112 - x) + 42000\sqrt{x^2 + 84^2}$ , khảo sát hàm số ta có

$$f'(x) = -25200 + 42000 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 84^2}}$$

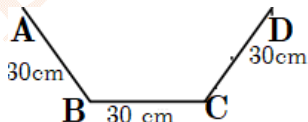
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 84^2}} = \frac{25200}{42000} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow x = \pm 63$$

Suy ra  $KM = 63m$ ,  $AK = 49m$  suy ra mệnh đề 3 sai.

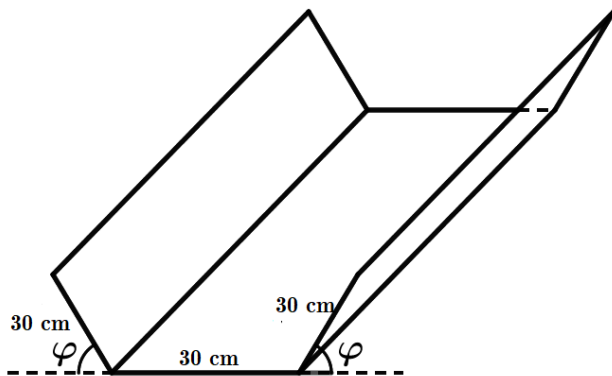
Chi phí lắp đặt thấp nhất là  $f(63) = 25200(112 - 63) + 42000\sqrt{63^2 + 84^2} = 5644800$

Suy ra mệnh đề 4 đúng.

- Câu 31. (VD)** Từ một tấm tôn có kích thước  $90cm \times 300cm$ , người ta làm một máng thoát nước, mặt cắt ngang của máng là hình thang cân  $ABCD$  có đáy lớn  $AD$ ,  $AB = BC = CD = 30cm$ , minh họa hình bên. Thể tích lớn nhất của máng bằng



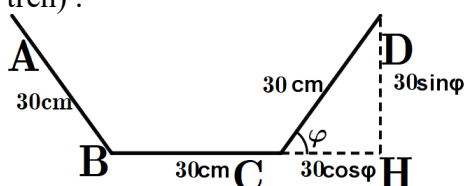
#### Lời giải



+) Gọi chiều dài máng nước là  $x$ , ta có tổng diện tích tôn làm máng nước theo hình vẽ trên là:  $30x + 30x + 30x = 90x \text{ (cm}^2\text{)}$ . Do tấm tôn làm có kích thước  $90\text{cm} \cdot 300\text{cm}$  nên ta có:

$$90x = 27000 \Leftrightarrow x = 300 \text{ (cm)}$$

+) Gọi  $\varphi$  là góc giữa thành máng nghiêng tạo với mặt đất ( $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ ) (tham khảo hình vẽ trên).



Theo yêu cầu bài toán, để có thể tích lớn nhất của máng nước thì diện tích hình thang  $ABCD$  đạt giá trị lớn nhất

$$\begin{aligned} \text{+) Ta có: } S_{ABCD} &= \frac{(AD + BC) \cdot DH}{2} = \frac{(30 + 60 \cos \varphi) + 30}{2} \cdot 30 \sin \varphi = (60 + 60 \cos \varphi) \cdot 15 \sin \varphi \\ &= 900(1 + \cos \varphi) \cdot \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\text{Xét: } f(\varphi) = 900(1 + \cos \varphi) \cdot \sin \varphi \text{ trên } \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

Ta

có:

$$\begin{aligned} f'(\varphi) &= 900 \cdot (1 + \cos \varphi)' \cdot \sin \varphi + 900 \cdot (1 + \cos \varphi) \cdot (\sin \varphi)' = -900 \sin^2 \varphi + 900 \cos^2 \varphi + 900 \cos \varphi \\ &= 900 \cos \varphi + 900(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = 900 \cos \varphi + 900 \cos 2\varphi \end{aligned}$$

$$\text{+) } f'(\varphi) = 0 \Leftrightarrow 900 \cdot (\cos 2\varphi + \cos \varphi) = 0 \Leftrightarrow 1800 \cdot \cos \frac{3\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{3\varphi}{2} = 0 \\ \cos \frac{\varphi}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3\varphi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \\ \varphi = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

Do  $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$ , để hàm số  $f(\varphi) = 900 + 900 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi$  trên  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  đạt giá trị lớn

$$\text{nhất thì } \varphi = \frac{\pi}{3} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 900 \left(1 + \cos \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 900 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 675\sqrt{3}$$

diện tích hình thang  $ABCD$  đạt giá trị lớn nhất là  $675\sqrt{3} \text{ cm}^2$ .

$$\text{Vậy thể tích lớn nhất của máng nước là: } V = B \cdot h = 675\sqrt{3} \cdot x = 675\sqrt{3} \cdot 300 = 202500\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}.$$

**Câu 32. (VD)** Một tàu đổ bộ tiếp cận Mặt Trăng theo cách tiếp cận thẳng đứng và đốt cháy các tên lửa hãm ở độ cao 250 km so với bề mặt của Mặt Trăng. Trong khoảng 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao  $h$  của con tàu so với bề mặt của Mặt Trăng được tính (gần đúng) bởi hàm, trong đó  $t$  là thời gian tính bằng giây và  $h$  là độ cao tính bằng kilômét (Nguồn: #A. Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2016).

- a) Vẽ đồ thị của hàm số  $y = h(t)$  với  $0 \leq t \leq 50$  (đơn vị trên trục hoành là 10 giây, đơn vị trên trục tung là 10 km).
- b) Gọi  $v(t)$  là vận tốc tức thời của con tàu ở thời điểm  $t$  (giây) kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm với  $0 \leq t \leq 50$ . Xác định hàm số  $v(t)$ .
- c) Vận tốc tức thời của con tàu lúc bắt đầu hãm phanh là bao nhiêu? Tại thời điểm  $t = 25$  (giây) là bao nhiêu?
- d) Tại thời điểm  $t = 25$  (giây), vận tốc tức thời của con tàu vẫn giảm hay đang tăng trở lại?
- e) Tìm thời điểm  $t$  ( $0 \leq t \leq 50$ ) sao cho con tàu đạt khoảng cách nhỏ nhất so với bề mặt của Mặt Trăng. Khoảng cách nhỏ nhất này là bao nhiêu?

### Lời giải

a) Xét hàm số  $y = h(t) = -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t + 250$  với  $0 \leq t \leq 50$ .

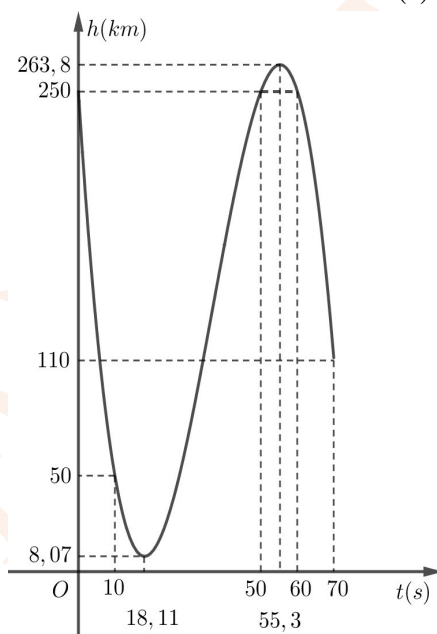
Ta

có

$$y' = -0,03t^2 + 2,2t - 30 = 0 \Rightarrow 3t^2 - 220t + 3000 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{110 + \sqrt{3100}}{3} \approx 55,23 \notin [0; 50] \\ t = \frac{110 - \sqrt{3100}}{3} \approx 18,11 \in [0; 50] \end{cases}$$

Khi đó  $h\left(\frac{110 - \sqrt{3100}}{3}\right) \approx 8,07$ ;  $h(0) = h(50) = 250$ .

Ta có đồ thị của hàm số  $y = h(t)$  như sau:



b) Ta có  $v(t) = y' = h'(t) = -0,03t^2 + 2,2t - 30$  với  $0 \leq t \leq 50$ .

c) Vận tốc của con tàu lúc bắt đầu hãm phanh (ứng với thời điểm  $t = 0$ ) là  $v(0) = -30$  (km/giây);

Tại thời điểm  $t = 25$  thì  $v(25) = 6,25$  (km/giây).

d) Ta có  $v'(t) = -0,06t + 2,2 = 0 \Rightarrow t = \frac{110}{3} \approx 36,67$ . Khi đó  $v\left(\frac{110}{3}\right) = \frac{31}{3}$ .

Bảng biến thiên của hàm số  $v(t) = -0,03t^2 + 2,2t - 30$  với  $0 \leq t \leq 50$  như sau:

|      |     |      |                 |    |
|------|-----|------|-----------------|----|
| t    | 0   | 25   | $\frac{110}{3}$ | 50 |
| v(t) | -30 | 6,25 | $\frac{31}{3}$  | 5  |

Từ bảng biến thiên ta thấy tại thời điểm  $t = 25$  (giây), vận tốc tức thời của con tàu đang tăng trở lại.

e) Từ đồ thị ở câu a) ta thấy thời điểm con tàu đạt khoảng cách nhỏ nhất so với bề mặt của Mặt

Trăng là  $t = \frac{110 - \sqrt{3100}}{3} \approx 18,11$  (giây).

Khoảng cách nhỏ nhất này là  $h\left(\frac{110 - \sqrt{3100}}{3}\right) \approx 8,07$  (km).