

NĂM TRỌN CÁC CHUYÊN ĐỀ MÔN TOÁN NĂM 2027



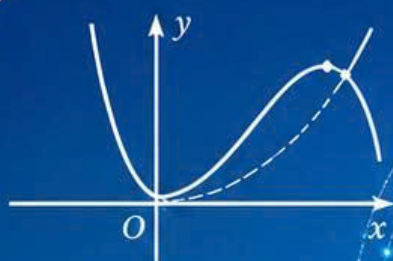
Phan Nhật Linh

☎ SĐT: 0817098716

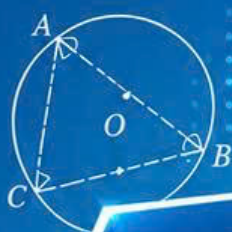
PHẦN I Hệ thống lý thuyết và công thức trọng tâm

PHẦN II Phương pháp giải các chuyên đề cốt lõi

PHẦN III Bài tập vận dụng và đề luyện tập

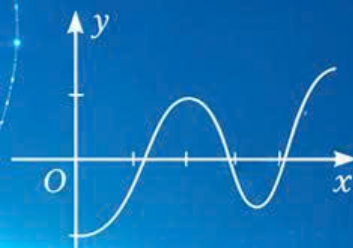


$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$



$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



2K9 TOÁN 12





LỜI NÓI ĐẦU

Quý thầy cô đồng nghiệp thân mến!

Thấm thoát đã hai năm chúng ta cùng nhau bước vào hành trình giảng dạy theo Chương trình Giáo dục phổ thông (GDPT) 2018. Hai năm qua là khoảng thời gian chúng ta không ngừng thử nghiệm, điều chỉnh và cùng học trò làm quen với một tư duy Toán học hoàn toàn mới.

Nhìn lại chặng đường đó, chắc hẳn nhiều thầy cô cũng có chung một trăn trở: Việc cố gắng truyền tải dần trải, dạy quá dài và bao quát mọi góc ngách lý thuyết như cách tiếp cận của chương trình cũ đang dần tỏ ra kém hiệu quả. Cách dạy này không chỉ làm học sinh quá tải mà còn khiến giáo viên vất vả trong việc phân bổ thời lượng trên lớp.

Đứng trước sự thay đổi cấu trúc của Kỳ thi tốt nghiệp THPT Quốc Gia và đặc biệt hơn là hai đề thi chính thức môn Toán 2025 và 2026, nơi đề cao năng lực giải quyết vấn đề và tính ứng dụng – tôi quyết định thay đổi hoàn toàn triết lý biên soạn trong bộ tài liệu mới này: **“Tinh gọn – Trọng tâm – Thực chiến”**.

Trong bộ tài liệu ôn thi THPT Quốc gia 2027 này, những phần lý thuyết hàn lâm và các dạng bài tập cũ dài dòng đã được cắt bỏ hoàn toàn. Thay vào đó, tài liệu đi sâu vào các giá trị cốt lõi:

- **Rèn luyện qua hệ thống đề trọng tâm:** Học sinh sẽ không học lý thuyết suông. Các em sẽ được cọ xát ngay với các hệ thống bài tập, đề rèn luyện được thiết kế bám sát ma trận cấu trúc mới. Học đến đâu, thực chiến giải quyết vấn đề đến đó.
- **Tập trung mạnh vào các dạng Toán thực tế:** Bắt kịp xu hướng tất yếu của GDPT 2018, hệ thống câu hỏi được xoáy sâu vào việc ứng dụng Toán học để giải quyết các bài toán thực tiễn, giúp học sinh rèn luyện kỹ năng "mô hình hóa" thay vì chỉ biết tính toán máy móc.
- **Tối ưu hóa thời gian đứng lớp:** Toàn bộ hệ thống được thiết kế dưới dạng tài liệu giảng dạy chuyên sâu (bản thuần văn bản, không bao gồm các video bài giảng đi kèm). Khung nội dung được dàn dựng sẵn sàng để quý thầy cô có thể trực tiếp mang lên bục giảng hoặc in ấn phát ngay cho học sinh, tiết kiệm hàng trăm giờ đồng hồ soạn giáo án.

Tôi tin rằng, bộ tài liệu này không chỉ là một tập hợp các bài toán, mà sẽ là một “người trợ lý” đắc lực. Nó giúp quý thầy cô giảm bớt thời gian biên soạn, gánh nặng chuyên môn, định hướng bài giảng sát với thực tế đề thi nhất và mang lại sự bứt phá về điểm số cho các em học sinh khóa 2027.

Xin kính chúc quý thầy cô thật nhiều sức khỏe, luôn giữ trọn ngọn lửa đam mê và có một mùa thi thành công rực rỡ cùng các học trò của mình!

Trân trọng,

Phan Nhật Linh

Thầy cô cần đăng ký bản word có đầy đủ lời giải chi tiết liên hệ Zalo: 0817 098 716

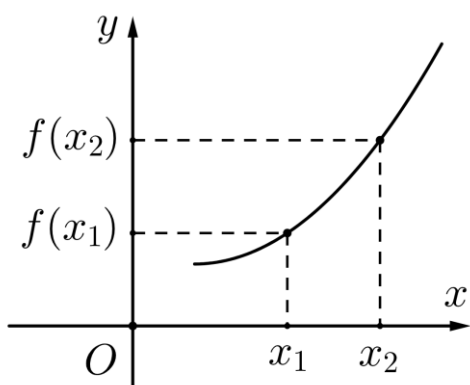
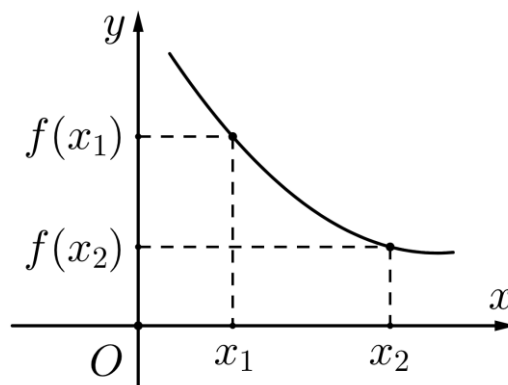
**BUỔI 01: TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ**

Chuyên đề tính đơn điệu của hàm số gồm lý thuyết và ví dụ minh họa

Sưu tầm và biên soạn: Phan Nhật Linh

KẾT NỐI TRI THỨC

Tài liệu khóa học luyện thi THPT Quốc Gia theo chương trình mới

A // LÝ THUYẾT CẦN NHỚ**1. Tính đơn điệu của hàm số****Nhắc lại về tính đồng biến, nghịch biến của hàm số**Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K , với K là một khoảng, nửa khoảng hoặc một đoạnHàm số $y = f(x)$ đồng biến (tăng) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến (giảm) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ **Hàm số đồng biến****Hàm số nghịch biến**Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K thì đồ thị của nó đi lên từ trái sang phảiNếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K thì đồ thị của nó đi xuống từ trái sang phảiHàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K được gọi chung là đơn điệu trên K **Tính đơn điệu của hàm số**Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng K **Chú ý:**Nếu K là một đoạn hoặc nửa khoảng thì phải bổ sung giả thiết “Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn hoặc nửa khoảng đó”**Chẳng hạn:** Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b)$ thì hàm số đồng biến trên đoạn $[a; b]$

**Chú ý:**

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

- a) Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến trên K
- b) Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số nghịch biến trên K
- c) Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số không đổi trên K

Nhận xét:

Nếu hàm số đồng biến trên K thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$

Nếu hàm số nghịch biến trên K thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$

2. Các bước xét tính đơn điệu của hàm số

Để xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$, ta thực hiện các bước sau:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định D của hàm số.
- **Bước 2:** Tính đạo hàm $y' = f'(x)$ của hàm số. Tìm các điểm $x \in D$ mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.
- **Bước 3:** Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.
- **Bước 4:** Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Xét tính đơn điệu của các hàm số cơ bản sau đây:

a) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Đạo hàm $y' = 6x^2 - 18x + 12$ và giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$			
y'	+	0	-	0	+		
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(2; +\infty)$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.



b) $y = x^4 - 4x^2 + 2$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.Đạo hàm $y' = 4x^3 - 8x$ và giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
y'	-	0	+	0	+
y	$+\infty$		2		$+\infty$

Bước 3: Xét dấu y' :Ta thấy $y' < 0$ trên $(-\infty; -\sqrt{2})$ và $(0; \sqrt{2})$; $y' > 0$ trên $(-\sqrt{2}; 0)$ và $(\sqrt{2}; +\infty)$.**Bước 4:** Kết luậnHàm số đồng biến trên $(-\sqrt{2}; 0)$ và $(\sqrt{2}; +\infty)$ Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -\sqrt{2})$ và $(0; \sqrt{2})$.

c) $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$

Bước 1: Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Bước 2: Đạo hàm $y' = \frac{(2x-2)(x-1) - (x^2-2x+3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	1	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	$2\sqrt{2}$		$2\sqrt{2}$	$+\infty$

Bước 3: Xét dấu y' : Dấu của y' phụ thuộc vào tử thức $x^2 - 2x - 1$ (vì mẫu số luôn dương).



Ta thấy $y' > 0$ trên $(-\infty; 1 - \sqrt{2})$ và $(1 + \sqrt{2}; +\infty)$; $y' < 0$ trên $(1 - \sqrt{2}; 1)$ và $(1; 1 + \sqrt{2})$.

Bước 4: Kết luận

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1 - \sqrt{2})$ và $(1 + \sqrt{2}; +\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(1 - \sqrt{2}; 1)$ và $(1; 1 + \sqrt{2})$.

d) $y = \sqrt{4x - 2x^2}$ (nhắc lại công thức đạo hàm hàm hợp $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$)

Bước 1: Điều kiện: $4x - 2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2x(2 - x) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$. Tập xác định: $D = [0; 2]$.

Bước 2: Đạo hàm $y' = \frac{(4x - 2x^2)'}{2\sqrt{4x - 2x^2}} = \frac{4 - 4x}{2\sqrt{4x - 2x^2}} = \frac{2 - 2x}{\sqrt{4x - 2x^2}}$ với mọi $x \in (0; 2)$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn)

Bảng biến thiên:

x	0	1	2
y'	+	0	-
y	0	$\sqrt{2}$	0

Bước 3: Xét dấu y' , ta thấy $y' > 0$ khi $x \in (0; 1)$ và $y' < 0$ khi $x \in (1; 2)$.

Bước 4: Kết luận

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 1)$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$

e) $y = \sin 2x - 2\cos x - 2x$ với $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Bước 1: Tập xác định trên khoảng đang xét $D = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Bước 2: Đạo hàm $y' = 2\cos 2x + 2\sin x - 2$.

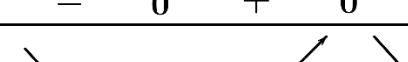
Sử dụng công thức $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, ta có:

$$y' = 2(1 - 2\sin^2 x) + 2\sin x - 2 = -4\sin^2 x + 2\sin x = -2\sin x(2\sin x - 1).$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$



Bước 3: Xét dấu y' trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	
y'	—	0	+	0	—
y					

Trên $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$: $\sin x < 0 \Rightarrow y' < 0$

Trên $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$: $0 < \sin x < \frac{1}{2} \Rightarrow y' > 0$.

Trên $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$: $\sin x > \frac{1}{2} \Rightarrow y' < 0$

Bước 4: Kết luận

Hàm số đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ và $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$

f) $y = x^2 - 2\cos x$

Bước 1: Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Bước 2: Đạo hàm $y' = 2x + 2\sin x$

Xét hàm số $g(x) = y' = 2x + 2\sin x$, có $g'(x) = 2 + 2\cos x = 2(1 + \cos x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Đẳng thức $g'(x) = 0$ chỉ xảy ra tại các điểm rời rạc $x = \pi + k2\pi$, do đó y' đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Nhận thấy $y'(0) = 0$, mà y' là hàm đồng biến nên $x = 0$ là nghiệm duy nhất của $y' = 0$.

Bước 3: Xét dấu y' và lập bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	—	0	+
y			

Với $x < 0$, do y' đồng biến nên $y'(x) < y'(0) = 0 \Rightarrow y' < 0$



Với $x > 0$, do y' đồng biến nên $y'(x) > y'(0) = 0 \Rightarrow y' > 0$

Bước 4: Kết luận

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên $(0; +\infty)$.

g) $y = 3x^2 - \sin 2x$

Bước 1: Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Bước 2: Đạo hàm $y' = 6x - 2\cos 2x$

Xét hàm $g(x) = y' = 6x - 2\cos 2x$, có $g'(x) = 6 + 4\sin 2x$

Vì $\sin 2x \geq -1 \Rightarrow g'(x) \geq 6 - 4 = 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

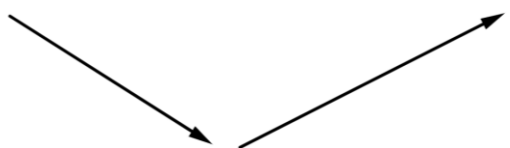
Suy ra y' là hàm số liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$

Ta có $y'(0) = -2 < 0$ và $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{2} > 0$.

Tồn tại duy nhất một nghiệm $x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ sao cho $y'(x_0) = 0$

Bước 3: Xét dấu y' và thấy rằng y' đồng biến trên $\mathbb{R}$, cắt trục hoành tại x_0

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y			

Ta thấy $y' < 0$ trên $(-\infty; x_0)$ và $y' > 0$ trên $(x_0; +\infty)$

Bước 4: Kết luận

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; x_0)$

Hàm số đồng biến trên $(x_0; +\infty)$ (với x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình $3x = \cos 2x$).

h) $y = x - 2\sin x$

Bước 1: Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Bước 2: Đạo hàm $y' = 1 - 2\cos x$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Bước 3: Xét dấu y' :

$$y' > 0 \Leftrightarrow \cos x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{3} + k2\pi; \frac{5\pi}{3} + k2\pi\right)$$

$$y' < 0 \Leftrightarrow \cos x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{3} + k2\pi; \frac{\pi}{3} + k2\pi\right)$$

Bước 4: Kết luận:



Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(\frac{\pi}{3} + k2\pi; \frac{5\pi}{3} + k2\pi\right)$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\frac{\pi}{3} + k2\pi; \frac{\pi}{3} + k2\pi\right) \forall k \in \mathbb{Z}$.

$$i) y = x - \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

Bước 1: Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Bước 2: Đạo hàm $y' = 1 + 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Bước 3: Xét dấu y' :

$$y' > 0 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{7\pi}{6} + k2\pi\right) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi\right).$$

$$y' < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{3\pi}{4} + k\pi; \frac{13\pi}{12} + k\pi\right)$$

Bước 4: Kết luận

Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(\frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi\right)$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(\frac{3\pi}{4} + k\pi; \frac{13\pi}{12} + k\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$

$$j) y = \frac{e^x}{x}$$

Bước 1: Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Bước 2: Đạo hàm $y' = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow e^x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad (\text{vì } e^x > 0 \forall x)$$

Bước 3: Xét dấu y' và lập bảng biến thiên:



x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	-		- 0 +	
y				

Ta thấy: $y' < 0$ trên $(-\infty; 0)$ và $(0; 1)$; $y' > 0$ trên $(1; +\infty)$.

Bước 4: Kết luận

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; 1)$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

k) $y = 2x^2 - 4x - \ln(x-1)$

Bước 1: Điều kiện: $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Tập xác định: $D = (1; +\infty)$.

Bước 2: Đạo hàm $y' = 4x - 4 - \frac{1}{x-1} = \frac{4(x-1)^2 - 1}{x-1}$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 4(x-1)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \frac{1}{2} \\ x-1 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \in D \\ x = \frac{1}{2} \notin D \end{cases}$.

Bước 3: Xét dấu y' trên $(1; +\infty)$: Mẫu số luôn dương và ta có bảng biến thiên:

x	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
y'		- 0 +	
y			

Ta thấy, trên $\left(1; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y' < 0$ và trên $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right) \Rightarrow y' > 0$

Bước 4: Kết luận

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(1; \frac{3}{2}\right)$

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

l) $y = |x+2| + |x-3|$

Bước 1: Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Bước 2 và 3: Phá dấu giá trị tuyệt đối để tìm các khoảng đơn điệu và có bảng biến thiên:



x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
y'	$-$	0	$-$	0	$+$
y					

Với $x \in (-\infty; -2)$ thì $y = -(x+2) - (x-3) = -2x+1 \Rightarrow y' = -2 < 0$ nên hàm số nghịch biến.

Với $x \in (-2; 3)$ thì $y = (x+2) - (x-3) = 5 \Rightarrow y' = 0$ nên hàm số không đổi (hằng số)

Với $x \in (3; +\infty)$ thì $y = (x+2) + (x-3) = 2x-1 \Rightarrow y' = 2 > 0$ nên hàm số đồng biến

Bước 4: Kết luận

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -2)$

Hằng số trên $(-2; 3)$

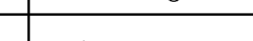
Hàm số đồng biến trên $(3; +\infty)$.

m) $y = |x^2 - 5x + 4| + |x - 2|$

Bước 1: Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Bước 2 và 3: Các điểm làm biểu thức trong trị tuyệt đối bằng 0 là $x = 1, x = 4$ và $x = 2$.

Ta xét trên từng khoảng và lập bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	3	4	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y							

Với $x \in (-\infty; 1]$ thì $y = (x^2 - 5x + 4) - (x - 2) \Rightarrow y' = 2x - 6 < 0$ nên hàm số nghịch biến.

Với $x \in [1; 2]$ thì $y = -(x^2 - 5x + 4) - (x - 2) \Rightarrow y' = -2x + 4 \geq 0$ nên hàm số đồng biến.

Với $x \in [2; 4]$ thì $y = -(x^2 - 5x + 4) + (x - 2) \Rightarrow y' = -2x + 6 \Leftrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Vậy $y' > 0$ trên $(2; 3)$ và $y' < 0$ trên $(3; 4)$.

Với $x \in [4; +\infty)$ thì $y = (x^2 - 5x + 4) + (x - 2) \Leftrightarrow y' = 2x - 4 > 0$ (vì $x \geq 4$) nên hàm số đồng biến.

Bước 4: Kết luận

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(1; 3)$ và $(4; +\infty)$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(3; 4)$.



$$n) y = \left| \frac{x^2 + 3x}{x-1} \right|$$

Bước 1: Xét hàm số bên trong dấu trị tuyệt đối $u(x) = \frac{x^2 + 3x}{x-1}$.

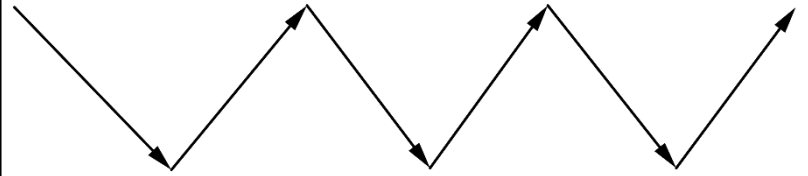
Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Bước 2: Đạo hàm $u'(x) = \frac{(2x+3)(x-1) - (x^2+3x)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$.

$$\text{Cho } u'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\text{Nghiem của } u(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

Bước 3: Sự biến thiên của hàm $y = |u(x)|$ phụ thuộc vào tính đơn điệu và dấu của $u(x)$, ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-3	-1	0	1	4	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y							

Từ bảng biến thiên, ta thấy:

Trên $(-\infty; -3)$ thì $u(x)$ đồng biến và nhận giá trị âm, do đó $|u(x)|$ nghịch biến

Trên $(-3; -1)$ thì $u(x)$ đồng biến và nhận giá trị dương, do đó $|u(x)|$ đồng biến.

Trên $(-1; 0)$ thì $u(x)$ nghịch biến và nhận giá trị dương, do đó $|u(x)|$ nghịch biến.

Trên $(0; 1)$ thì $u(x)$ nghịch biến và nhận giá trị âm, do đó $|u(x)|$ đồng biến.

Trên $(1; 3)$ thì $u(x)$ nghịch biến và nhận giá trị dương, do đó $|u(x)|$ nghịch biến

Trên $(3; +\infty)$ thì $u(x)$ đồng biến và nhận giá trị dương, do đó $|u(x)|$ đồng biến

Bước 4: Kết luận:

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-3; -1)$, $(0; 1)$ và $(3; +\infty)$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$, $(-1; 0)$ và $(1; 3)$



Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)(x-2)^4(x-10)$. Có tất cả bao nhiêu bộ số nguyên $(\alpha; \beta)$ sao cho hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(\alpha; \beta)$?

Trả lời:

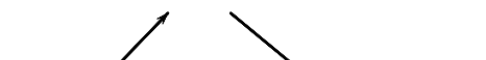
4	5		
---	---	--	--

Lời giải

Tập xác định của hàm số là: $D = \mathbb{R}$

Ta có đạo hàm: $f'(x) = (x-1)(x-10) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=10 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	10	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 10)$.

Số cách chọn bộ số nguyên $(\alpha; \beta)$ là ta chọn các bộ số $[1; 10]$ sao cho $1 \leq \alpha < \beta \leq 10$ là: $C_{10}^2 = 45$ cách.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(3a-1; a^2+2)$

Trả lời:

1			
---	--	--	--

Lời giải

Tập xác định của hàm số là: $D = \mathbb{R}$

Ta có đạo hàm: $f'(x) = 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$		3		$+\infty$
				-1	

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-1 < a^2+2 \\ (3a-1; a^2+2) \subset (1; 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-3a+3 > 0 \\ 3a-1 \geq 1 \\ a^2+2 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq \frac{2}{3} \\ -1 \leq a \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq a \leq 1$$

Mà $a \in \mathbb{Z}$ nên giá trị của $a = 1$ suy ra chỉ có một giá trị nguyên của tham số a thỏa mãn.



Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-m)(x-n)(x-p)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mỗi giá trị a, b, c được xác định độc lập bằng cách gieo ngẫu nhiên đồng thời ba lần hai con súc sắc cân đối đồng chất rồi lấy tổng số chấm xuất hiện trong mỗi lần đó. Hãy tính xác suất để hàm số nghịch biến trên khoảng $(3;4)$ (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Trả lời:

0	,	7	9
---	---	---	---

Lời giải

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến (giảm) trên khoảng $(3;4)$ khi và chỉ khi đạo hàm của nó không dương trên khoảng này nên suy ra $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in (3;4) \Leftrightarrow (x-m)(x-n)(x-p) \leq 0$ với mọi $x \in (3;4)$

Mỗi giá trị k (đại diện cho m, n, p) là tổng số chấm khi gieo một cặp súc sắc

Do đó $k \in \{2, 3, \dots, 12\}$

Với $x \in (3;4)$, ta xét dấu của một thừa số bất kỳ $(x-k)$:

Nếu $k \leq 3$ (tức là tổng số chấm là 2 hoặc 3) thì $x > 3 \geq k \Rightarrow x - k > 0$ và thừa số này mang dấu dương (+)

Nếu $k \geq 4$ (tức là tổng số chấm từ 4 đến 12) thì $x < 4 \leq k \Rightarrow x - k < 0$ và thừa số này mang dấu âm (-)

Để tích $(x-m)(x-n)(x-p) \leq 0$ thì phải có một số lẻ các thừa số âm

Số phần tử của không gian mẫu khi gieo hai con súc sắc $n(\Omega) = 6.6 = 36$

Xác suất để tổng ≤ 3 (thừa số dương): Các cặp có tổng bằng 2 là $(1,1)$; các cặp có tổng bằng 3 là $(1,2), (2,1)$

$$\text{Vậy } P(\text{Tổng} \leq 3) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \Rightarrow P(\text{Tổng} \geq 4) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

Trường hợp 1: Có đúng một thừa số âm và hai thừa số dương (một tổng ≥ 4 và hai tổng ≤ 3)

$$\text{Chọn 1 trong 3 lần gieo có tổng} \geq 4 \text{ có } C_3^1 = 3 \text{ cách chọn} \Rightarrow P_1 = 3 \cdot \left(\frac{11}{12}\right) \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{33}{1728}$$

Trường hợp 2: Có đúng ba thừa số âm (cả ba tổng m, n, p đều ≥ 4)

$$\text{Suy ra } P_2 = P(\text{Tổng} \geq 4)^3 = \left(\frac{11}{12}\right)^3$$

$$\text{Vậy xác suất cần tính là: } P(A) = P_1 + P_2 = \frac{33}{1728} + \frac{1331}{1728} = \frac{341}{432} = 0,78935\dots \approx 0,79$$

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-a)(x^2 - 12x + b)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu cặp số nguyên dương $(a; b)$ với điều kiện $b \leq 40$ để hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(6; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$?

Trả lời:

2	9		
---	---	--	--

Lời giải



Xét tam thức bậc hai $g(x) = x^2 - 12x + b$ có $\Delta' = 36 - b$

Ta chia thành 2 trường hợp để biện luận dấu của $f'(x)$

Trường hợp 1: $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow b \geq 36$

Vì giới hạn của đề bài là $b \leq 40$ nên $b \in \{36; 37; 38; 39; 40\}$

Khi $\Delta' \leq 0$ thì $g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Dấu của $f'(x)$ lúc này hoàn toàn phụ thuộc vào nhị biểu thức $(x - a)$

Ta có: $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x - a \geq 0 \Leftrightarrow x \geq a$

Để hàm số thỏa mãn cả hai điều kiện là:

Đồng biến trên $(6; +\infty) \Rightarrow (6; +\infty) \subset [a; +\infty) \Rightarrow a \leq 6$.

Nghịch biến trên $(0; 2) \Rightarrow (0; 2) \subset (-\infty; a] \Rightarrow a \geq 2$

Kết hợp lại ta được: $2 \leq a \leq 6$ mà $a \in \mathbb{Z}^+$ nên $a \in \{2; 3; 4; 5; 6\}$

Cứ mỗi giá trị của a sẽ ghép được với một giá trị của b nên có $5.5 = 25$ cặp $(a; b)$ thỏa mãn

Trường hợp 2: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow b < 36$

Lúc này $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$

Theo định lý Vi-ét, ta có: $x_1 + x_2 = 12$ mà $x_1 < x_2$ nên chắc chắn $x_1 < 6 < x_2$

Đạo hàm $f'(x) = (x - a)(x - x_1)(x - x_2)$

Để hàm số đồng biến trên $(6; +\infty)$ thì $f'(x) \geq 0, \forall x > 6$.

Tuy nhiên, ta lại có một nghiệm $x_2 > 6$.

Nếu $f'(x)$ không có nghiệm kép tại x_2 , đạo hàm sẽ đổi dấu khi đi qua x_2 và sẽ không thỏa mãn điều kiện đồng biến.

Do đó, bắt buộc phải có $a = x_2$ để tạo thành nghiệm bội chẵn

Khi $a = x_2$, ta có $f'(x) = (x - x_1)(x - a)$

Dấu của $f'(x)$ bây giờ chỉ phụ thuộc vào $(x - x_1)$ nên $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq x_1$

Hàm số đồng biến trên $(6; +\infty) \Rightarrow x_1 \leq 6$ (luôn đúng vì $x_1 < 6$)

Hàm số nghịch biến trên $(0; 2) \Rightarrow x_1 \geq 2$

Suy ra: $2 \leq x_1 < 6$. Vì $a = x_2 \in \mathbb{Z}^+$ nên $x_1 = 12 - a$ cũng phải là số nguyên

Các giá trị có thể của x_1 là $\{2; 3; 4; 5\}$

Ta lập bảng các cặp số tương ứng (nhớ điều kiện $b = x_1 \cdot x_2$)

Với $x_1 = 2 \Rightarrow a = 10 \Rightarrow b = 2.10 = 20 < 36$ (thỏa mãn)

Với $x_1 = 3 \Rightarrow a = 9 \Rightarrow b = 3.9 = 27 < 36$ (thỏa mãn)

Với $x_1 = 4 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow b = 4.8 = 32 < 36$ (thỏa mãn)

Với $x_1 = 5 \Rightarrow a = 7 \Rightarrow b = 5.7 = 35 < 36$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2 có thêm 4 cặp $(a; b)$ thỏa mãn nên tổng cả hai trường hợp có 29 cặp thỏa mãn

Câu 6: Một cửa hàng bán Tivi với các số liệu kinh doanh như sau: Giá bán ban đầu là 14 triệu đồng một cái, tại mức giá này cửa hàng bán được 100 cái mỗi tháng. Cứ mỗi lần giảm giá 500 nghìn đồng



thì số lượng tivi bán ra sẽ tăng thêm 10 cái mỗi tháng. Hỏi cửa hàng có thể thực hiện tối đa bao nhiêu lần giảm giá để đảm bảo rằng doanh thu vẫn đang trong giai đoạn tăng?



Trả lời:

9			
---	--	--	--

Lời giải

Gọi x là số lần giảm giá với mỗi lần giảm là 0,5 triệu đồng thì giá bán là: $P(x) = 14 - 0,5x$
Số lượng tivi bán ra là $Q(x) = 100 + 10x$ nên doanh thu nhận được là

$$D(x) = (14 - 0,5x)(100 + 10x)$$

$$\Leftrightarrow D(x) = -5x^2 + 90x + 1400. \text{ Xét hàm số } D(x) \text{ có đạo hàm } D'(x) = -10x + 90$$

Hàm doanh thu luôn tăng tức là hàm đồng biến khi và chỉ khi:

$$D'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -10x + 90 \geq 0 \Leftrightarrow 10x \leq 90 \Leftrightarrow x \leq 9$$

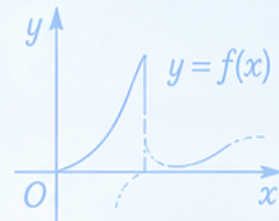
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	9	$+\infty$
$D'(x)$	+	0	-
$D(x)$	$-\infty$	1805	$-\infty$

Vậy số lần giảm giá tối đa để doanh thu vẫn còn trong giai đoạn tăng (tức là chưa bắt đầu giảm) là 9 lần.

----- HẾT -----





PROPOSAL

GIỚI THIỆU TÀI LIỆU 2027



Tài liệu học tập bám sát định hướng đề thi của BGD



CẤU TRÚC TÀI LIỆU



Lý thuyết



Bài tập vận dụng



Đề rèn luyện thực tế

★ ĐIỂM NỔI BẬT



Hệ thống kiến thức trọng tâm, trình bày rõ ràng, dễ học



Bài tập chọn lọc, tăng dần mức độ từ cơ bản đến vận dụng



Đề rèn luyện thực tế bám sát cấu trúc và định hướng của BGD



Phù hợp cho quá trình học tập, ôn luyện và tự đánh giá năng lực



Mục tiêu: Giúp học sinh nắm chắc kiến thức, rèn kỹ năng làm bài và tự tin chinh phục các dạng đề thực tế năm 2027.



Phan Nhật Linh - SĐT: 0817 098 716

**ĐỀ RÈN LUYỆN 01: TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ CƠ BẢN**

Chuyên đề tính đơn điệu của hàm số gồm lý thuyết và ví dụ minh họa

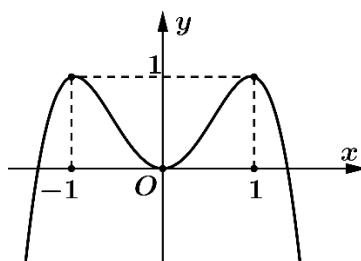
Sưu tầm và biên soạn: Phan Nhật Linh

KẾT NỐI TRI THỨC

Tài liệu khóa học luyện thi THPT Quốc Gia theo chương trình mới

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ sau. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-1; 0)$.**B.** $(-\infty; -1)$.**C.** $(0; 1)$.**D.** $(0; +\infty)$.**Lời giải**

Dựa vào đồ thị ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 2: Hàm số $y = -x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1; 1)$.**B.** $(-\infty; -1)$.**C.** $(0; \sqrt{3})$.**D.** $(1; +\infty)$.**Lời giải**

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y = -x^3 + 3x \Rightarrow y' = -3x^2 + 3$ và giải $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-2	2	$-\infty$	

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

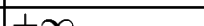
Câu 3: Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 9x - 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3)$.**B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 1)$.**C.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$.**D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; +\infty)$.**Lời giải**



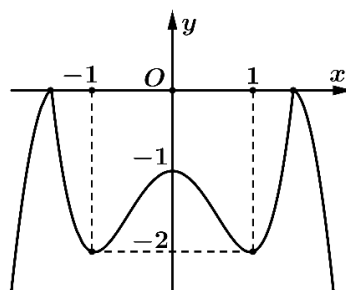
Ta có $y' = -3x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$					$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-3;1)$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ sau. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-1;0)$.

B. $(-\infty;-1)$.

C. $(0;1)$.

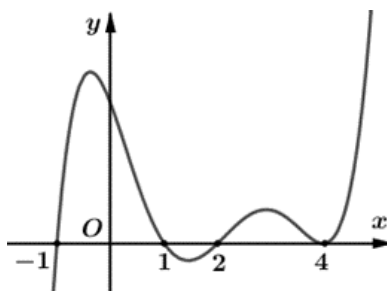
D. $(1;+\infty)$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ sau. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-1;1)$.

B. $(-\infty;-1)$.

C. $(0;1)$.

D. $(1;2)$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

Câu 6: Hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(1;+\infty)$.

B. $(-5;-2)$.

C. $(-\infty;1)$.

D. $(-1;3)$.



Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	12	-20	$+\infty$	

Từ bảng xét dấu ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-5; -2)$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$			2	

The graph shows the function $f(x)$ plotted against x . The x-axis has critical points at $-\infty$, 2 , 3 , and $+\infty$. The y-axis has values $+\infty$, -1 , 2 , and $-\infty$. The function starts at $+\infty$ for $x \rightarrow -\infty$, decreases to a local minimum of -1 at $x=2$, increases to a local maximum of 2 at $x=3$, and then decreases to $-\infty$ as $x \rightarrow +\infty$.

Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.
- B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2) \cup [3; +\infty)$.
- C.** Hàm số đồng biến trên đoạn $[-1; 2]$.
- D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(2; \frac{5}{2}\right)$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(2; 3)$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $\left(2; \frac{5}{2}\right)$.

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{x-2024}{x+1}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
- B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- C.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
- D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và có đạo hàm $y' = \frac{2025}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1$.



Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Câu 9: Hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 5}{x + 1}$ nghịch biến trên các khoảng nào sau đây?

A. $(-4; -1)$ và $(-1; 2)$.

B. $(-\infty; -4)$ và $(2; +\infty)$.

C. $(-4; 2)$.

D. $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và đạo hàm $y' = \frac{x^2 + 2x - 8}{(x + 1)^2}$.

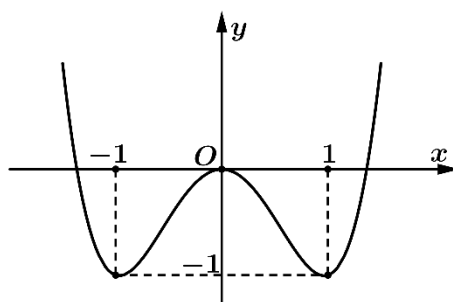
Ta có: $y' = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -4 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-4	-1	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	1	$+\infty$	1	$+\infty$	

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-4; -1)$ và $(-1; 2)$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị là đường cong như hình bên dưới. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-1; 0)$.

B. $(-\infty; -1)$.

C. $(0; +\infty)$.

D. $(1; +\infty)$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ta có trên khoảng $(-1; 0)$ $f'(x) < 0$ nên hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-1; 0)$

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = (x + 2)(x + 1)(x^2 - 1)$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-1; 1)$.

B. $(0; +\infty)$.

C. $(-\infty; -2)$.

D. $(-2; -1)$.

Lời giải



$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x+1)^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng xét dấu của đạo hàm và kết luận

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 12: Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 4)$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là $(-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$ và có đạo hàm $y' = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}}$

Với $x \in (-\infty; 0)$ thì $y' < 0$, với $x \in (4; +\infty)$ thì $y' > 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
y'	—			—
y	$+\infty$ ↘ 0		0 ↗ $+\infty$	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3		-2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	0		5	$-\infty$

a) Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -5)$ và $(-3; -2)$

b) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 5)$

c) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$

d) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$



Lời giải

- a) Đúng: Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -5)$ và $(-3; -2)$
- b) Sai: Do từ $(-2; 5)$ hàm số nghịch biến
- c) Đúng: Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$
- d) Đúng: Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x - 1}$.

- a) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- b) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên tập xác định
- c) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 3)$
- d) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ và đạo hàm $y' = f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	1	$-\infty$	9	$+\infty$	

- a) Sai: Từ bảng biến thiên suy ra mệnh đề sai.
- b) Sai: Hàm số đơn điệu trên từng khoảng xác định
- c) Sai: Hàm số không tồn tại đạo hàm tại $x = 1$
- d) Sai: Hàm số không đơn điệu trên khoảng rời rạc

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x + 2}{-x^2 - x - 2}$

- a) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$
- b) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-5; -4)$
- c) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 4)$
- d) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -4)$ và $(0; +\infty)$

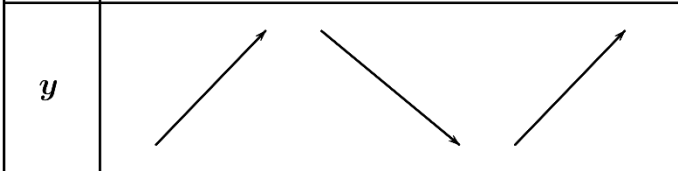
Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$



Đạo hàm: $f'(x) = \frac{x(x+4)}{(-x^2-x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-4 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-4	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y					

- a) Sai:
- b) Đúng:
- c) Sai:
- d) Đúng:

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x) = 2 - \sqrt{-x^2 + 5x + 6}$

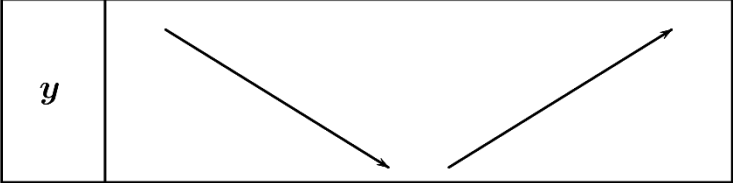
- a) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;6)$
- b) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$
- c) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{5}{2};6\right)$
- d) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\frac{5}{2}\right)$

Lời giải

Tập xác định: $D = [-1;6]$

Đạo hàm: $y' = \frac{2x-5}{2\sqrt{-x^2+5x+6}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

Bảng biến thiên:

x	-1	$2,5$	6
y'	$-$	0	$+$
y			

- a) Sai:
- b) Đúng:
- c) Đúng:
- d) Sai: Hàm số không xác định khi $x < -1$.

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -\frac{t^3}{3} + 9t^2 - 17t + 10$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Trong 30 giây đầu tiên, chất điểm có vận tốc tức thời giảm trong khoảng thời gian $(a; b)$. Giá trị của biểu thức $P = 3b - 4a$ là bao nhiêu?

Trả lời:

5	4		
---	---	--	--

Lời giải

Vận tốc tức thời của chất điểm là $v(t) = s'(t) = -t^2 + 18t - 17$.

Gia tốc tức thời của chất điểm là $a(t) = v'(t) = -2t + 18$.

Vì vận tốc tức thời của chất điểm giảm nên $a(t) < 0 \Leftrightarrow -2t + 18 < 0 \Leftrightarrow t > 9$.

Do đó, trong 30 giây đầu tiên, chất điểm có vận tốc tức thời giảm trong khoảng thời gian $(9; 30)$

Suy ra $a = 9$, $b = 30$ nên $P = 3b - 4a = 54$.

Câu 2: Một chất điểm chuyển động trên trục Ox theo phương trình $x = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right)$, trong đó x là li độ của chất điểm tại thời điểm t giây. Trong 10 giây đầu tiên, ở thời điểm nào chất điểm bắt đầu chuyển động theo hướng dương của trục Ox ?

Trả lời:

4			
---	--	--	--

Lời giải

Chất điểm chuyển động theo hướng dương khi li độ x tăng hay hàm số $x = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right)$ đồng biến.

Xét hàm số $x = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right)$ trên $[0; 10]$ có đạo hàm $x'(t) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right)$.

Xét phương trình $x'(t) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = 4k, (k \in \mathbb{Z})$.

Ta có: $0 \leq t \leq 10 \Leftrightarrow 0 \leq 4k \leq 10 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq \frac{5}{4}$. Do $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 0; k = 1; k = 2 \Rightarrow t \in \{0; 4; 8\}$

t	0	4	8	10	
$x'(t)$	—	0	+	0	—
$x(t)$	$+\infty$		2		0
		-2			

Vậy chất điểm bắt đầu chuyển động theo chiều dương tại thời điểm $t = 4$ giây

Câu 3: Hằng ngày mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (m) của mực nước trong kênh tại thời điểm t (h) ($0 \leq t \leq 24$) trong ngày được xác định bởi công thức



$h = 2\cos\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3}\right) + 5$. Gọi $(a; b)$ là khoảng thời gian trong ngày mà độ sâu của mực nước trong kênh tăng dần. Tính giá trị của $a + b$

Trả lời:

2	8		
---	---	--	--

Lời giải

Ta có $h(t) = 2\cos\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3}\right) + 5 \Rightarrow h'(t) = -\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3}\right)$.

$h'(t) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow t = -4 + 12k \ (k \in \mathbb{Z})$.

Mà $0 \leq t \leq 24$ nên $0 \leq -4 + 12k \leq 24 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq k \leq \frac{7}{3} \Rightarrow k \in \{1; 2\}$.

Do đó $h'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 8 \\ t = 20 \end{cases}$

t	0	8	20	24	
$h'(t)$	-	0	+	0	-
$h(t)$	6			7	
		3			6

Do đó hàm số $h(t)$ đồng biến trên khoảng $(8; 20)$ hay trong khoảng từ 8h đến 20h độ sâu của mực nước trong kênh tăng dần.

Vậy $a = 8; b = 20$ và $a + b = 28$.

Câu 4: Giả sử số lượng quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hóa bằng hàm số $P(t) = \frac{25}{0,25 + e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tốc độ sinh trưởng của quần thể nấm men ở thời điểm t được tính theo công thức $P'(t)$. Số lượng quần thể nấm men có thể tăng lên nhưng không vượt quá bao nhiêu?

Trả lời:

1	0	0	
---	---	---	--

Lời giải

Ta có $P'(t) = \frac{18,75 \cdot e^{-0,75t}}{(0,25 + e^{-0,75t})^2} > 0, \forall t > 0$. Suy ra số lượng quần thể nấm men được nuôi cấy luôn

tăng và $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25}{0,25 + e^{-0,75t}} = 100$.

Do đó, số lượng quần thể nấm men tăng nhưng không vượt quá 100.



Câu 5: Xét chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox . Tọa độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = \frac{4}{3}t^3 - \frac{17}{2}t^2 + 13t + 1$ với $t \geq 0$. Khi đó vận tốc $v(t)$ của chất điểm tại thời điểm t là $x'(t)$. Biết vận tốc của chất điểm tăng trên khoảng $(a; +\infty)$ với a là số thực dương nhỏ nhất. Tìm a (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Trả lời:

2	,	1	3
---	---	---	---

Lời giải

Ta có: $v(t) = x'(t) = 4t^2 - 17t + 13$ có đạo hàm $v'(t) = 8t - 17$

Giải phương trình đạo hàm $v'(t) = 0 \Leftrightarrow 8t - 17 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{17}{8}$.

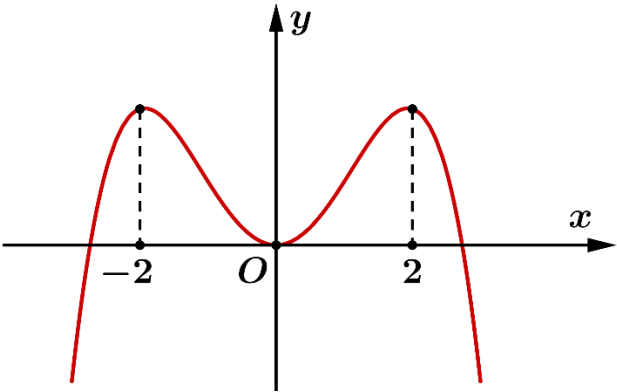
Bảng xét dấu của $v'(t)$ là :

t	0	2,125	$+\infty$
$v'(t)$	-	0	+

Hàm số $v(t)$ đồng biến trên $\left(\frac{17}{8}; +\infty\right)$ nên vận tốc của chất điểm tăng trên khoảng $\left(\frac{17}{8}; +\infty\right)$

nên $a = \frac{17}{8} \approx 2,13$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Một học sinh gieo một đồng xu cân đối và đồng chất 5 lần liên tiếp. Gọi S là số lần đồng xu đó xuất hiện mặt sấp. Tính xác suất để hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(S-3; S-2)$.

Biết rằng xác suất tính được là phân số tối giản $p = \frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}^*$). Tính giá trị của biểu thức

$$T = a + b$$

Trả lời:

1	2		
---	---	--	--

Lời giải

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$

Gieo đồng xu 5 lần nên số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = 2^5 = 32$.



Gọi S là số lần xuất hiện mặt sấp thì giá trị có thể nhận của S là: $S \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

Để hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(S - 3; S - 2)$ thì khoảng $(S - 3; S - 2)$ phải là tập con của các khoảng nghịch biến

Trường hợp 1: $(S - 3; S - 2) \subset (-2; 0)$

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} S - 3 \geq -2 \\ S - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S \geq 1 \\ S \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq S \leq 2$

Vì S là số nguyên nên ta nhận các giá trị $S \in \{1; 2\}$

Trường hợp 2: $(S - 3; S - 2) \subset (2; +\infty)$

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $S - 3 \geq 2 \Leftrightarrow S \geq 5$

Kết hợp với điều kiện $S \leq 5$ thì ta nhận được giá trị duy nhất $S = 5$

Các giá trị của S thỏa mãn yêu cầu bài toán là $S \in \{1; 2; 5\}$

Số kết quả thuận lợi cho biến cố (ứng với các trường hợp tung được 1 sấp, 2 sấp hoặc 5 sấp) là:

$$n(A) = C_5^1 + C_5^2 + C_5^5 = 5 + 10 + 1 = 16$$

Xác suất cần tìm là: $p = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$ suy ra $a = 1$ và $b = 2$ nên $T = 1 + 2 = 3$.

----- **HẾT** -----



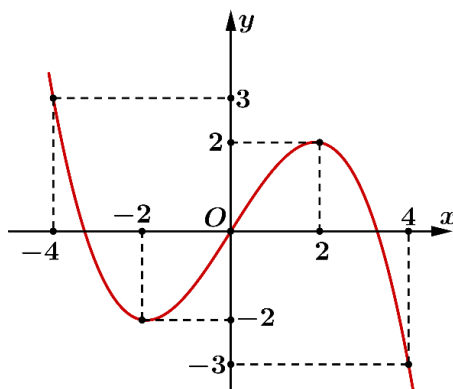
**BUỔI 02: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ**

Chuyên đề tính đơn điệu của hàm số gồm lý thuyết và ví dụ minh họa

Sưu tầm và biên soạn: Phan Nhật Linh

KẾT NỐI TRI THỨC

Tài liệu khóa học luyện thi THPT Quốc Gia theo chương trình mới

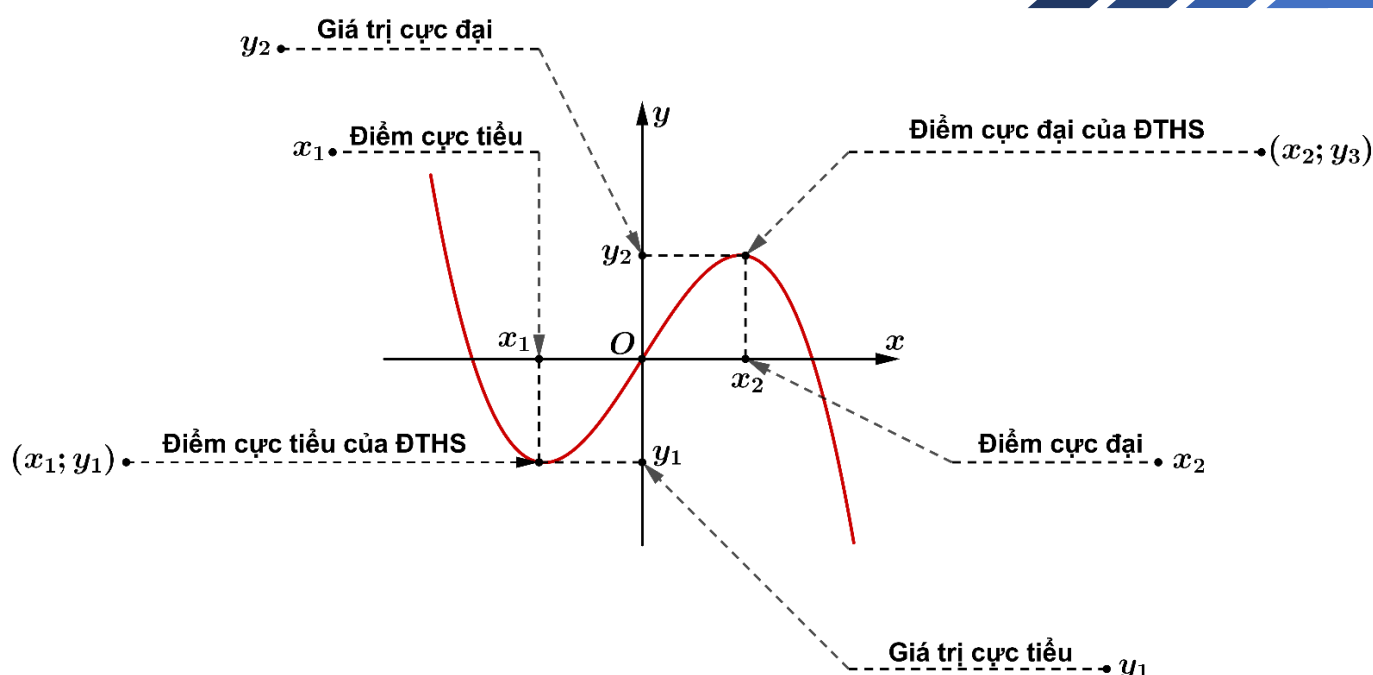
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ**1. Tính đơn điệu của hàm số****Một ví dụ mở đầu:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:**Khái niệm cực trị của hàm số**Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D và $x_0 \in D$.

Nếu tồn tại một khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và $(a; b) \subset D$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$ thì x_0 được gọi là một điểm cực đại, $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số $y = f(x)$, kí hiệu là y_{CD} .

Nếu tồn tại một khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và $(a; b) \subset D$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$ thì x_0 được gọi là một điểm cực tiểu, $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số $y = f(x)$, kí hiệu là y_{CT} .

Chú ý:

- Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị của hàm số. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là giá trị cực trị (còn gọi là cực trị) của hàm số
- Nếu x_0 là một điểm cực trị (điểm cực đại, điểm cực tiểu) của hàm số $y = f(x)$ thì ta cũng nói hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị (cực đại, cực tiểu) tại x_0
- Hàm số có thể đạt cực đại và cực tiểu tại nhiều điểm trên D
- Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì điểm $M(x_0; f(x_0))$ là một điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$.



Tìm cực trị của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó:

- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0 .
- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 .

x	a	x_0	b
$f'(x)$	+		
$f(x)$			

x	a	x_0	b
$f'(x)$	-		
$f(x)$			

Chú ý:

- Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f'(x)$ không đổi dấu khi x qua điểm x_0 thì hàm số không có cực trị tại x_0 .
- Nếu $f'(x)$ không đổi dấu trên khoảng K thì $f(x)$ không có cực trị trên khoảng đó.

Định lý

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong khoảng $(a; b)$ chứa x_0 . Khi đó:

- Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số.
- Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$ thì x_0 là điểm cực đại của hàm số.



Chú ý: Chiều đảo của định lý này không chắc đúng. Nhưng đối với hàm số bậc ba, chiều đảo của định lý luôn đúng.

2. Các quy tắc tìm cực trị

Quy tắc 1:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định D của hàm số.
- **Bước 2:** Tính đạo hàm $y' = f'(x)$ của hàm số. Tìm các điểm $x \in D$ mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.
- **Bước 3:** Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên của hàm số
- **Bước 4:** Từ bảng biến thiên, nêu kết luận về cực trị của hàm số

Quy tắc 2:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định D của hàm số.
- **Bước 2:** Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ và kí hiệu x_i ($i = 1, 2, \dots$) là các nghiệm của nó
- **Bước 3:** Tính đạo hàm cấp hai $f''(x)$ và tính các giá trị $f''(x_i)$
- **Bước 4:** Dựa vào dấu $f''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i như sau:

$f''(x_i) > 0$: hàm số đạt cực tiểu tại $x = x_i$

$f''(x_i) < 0$: hàm số đạt cực đại tại $x = x_i$

$f''(x_i) = 0$: chưa đủ cơ sở để kết luận $x = x_i$ có là điểm cực trị hay không

B // VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Tìm điểm cực trị của các hàm số sau đây:

a) $y = 4x^3 - 2x^2 - 8x + 3$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Đạo hàm: $y' = 12x^2 - 4x - 8$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	3	5	$+\infty$	
y'	+	0	−	0	+
y	$-\infty$	$\nearrow \frac{169}{27}$	$\searrow -3$	$\nearrow +\infty$	



Từ bảng biến thiên ta có :

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$, giá trị cực tiểu là $y_{CT} = -3$

Hàm số đạt cực đại tại $x = -\frac{2}{3}$, giá trị cực đại là $y_{CD} = \frac{169}{27}$

b) $y = -x^3 + 4x^2 - 5x + 1$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Đạo hàm: $y' = -3x^2 + 8x - 5$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{5}{3} \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$			-1			$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta có:

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$, giá trị cực tiểu là $y_{CT} = -1$

Hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{5}{3}$, giá trị cực đại là $y_{CD} = -\frac{23}{27}$

c) $y = \frac{-x+2}{2x+1}$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$

Đạo hàm: $y' = \frac{-5}{(2x+1)^2} < 0 \forall x \in D$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	$-$		$-$
y	$-\frac{1}{4}$	$-\infty$	$+\infty$
			$-\frac{1}{2}$

Từ bảng biến thiên ta có:

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định, không có cực trị

d) $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

Đạo hàm: $y' = \frac{(2x-3)(x-3) - (x^2-3x+1)}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=4 \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	3	4	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	1	$+\infty$	5	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên ta thấy:

Hàm số đạt cực đại tại $x=2$, giá trị cực đại là $y_{CD} = 1$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=4$, giá trị cực đại là $y_{CT} = 5$

e) $y = \sqrt{10x - x^2}$.

Lời giải

Tập xác định: $10x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0; 10]$

Đạo hàm: $y' = \frac{10-2x}{2\sqrt{10x-x^2}} = \frac{5-x}{\sqrt{10x-x^2}}$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = 5$

Ta có bảng biến thiên:

x	0	5	10
y'	+	0	-
y	0	5	0

Từ bảng biến thiên ta thấy:

Trên $[0; 10]$, hàm số đạt cực đại tại $x=5$, giá trị cực đại là $y_{CD} = 5$.

(Không có cực trị trên $[0; 10]$)

f) $y = \sqrt{x+1} \cdot (3x-2)$

Lời giải

Tập xác định: $D = [-1; +\infty)$

Đạo hàm: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}(3x-2) + \sqrt{x+1} \cdot 3 = \frac{3x-2+6(x+1)}{2\sqrt{x+1}} = \frac{9x+4}{2\sqrt{x+1}}$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{9}$

Ta có bảng biến thiên:

x	-1	$-\frac{4}{9}$	$+\infty$
y'	-	0	+
y	0	$-\frac{10\sqrt{5}}{9}$	$+\infty$



Từ bảng biến thiên ta thấy

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -\frac{4}{9}$, giá trị cực tiểu là $y_{CT} = -\frac{10\sqrt{5}}{9}$

g) $y = \sin 2x - 2\cos x - 2x$ với $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Lời giải

Đạo hàm: $y' = 2\cos 2x + 2\sin x - 2 = 2(1 - 2\sin^2 x) + 2\sin x - 2 = -4\sin^2 x + 2\sin x$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 2\sin x(1 - 2\sin x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{\pi}{6} \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
y'	$-$	0	$+$	0
y		-2	$-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}$	

Từ bảng biến thiên ta thấy :

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, giá trị cực tiểu là $y_{CT} = -2$

Hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{\pi}{6}$, giá trị cực đại là $y_{CD} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}$

h) $y = \frac{e^x}{x}$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Đạo hàm: $y' = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y		e	

Từ bảng biến thiên ta thấy

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$, giá trị cực tiểu là $y_{CT} = e$

i) $y = \log_3(6x - x^2)$

Lời giải

Tập xác định: $6x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (0; 6)$



Đạo hàm: $y' = \frac{(6x-x^2)'}{(6x-x^2)\ln 3} = \frac{6-2x}{(6x-x^2)\ln 3}$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Ta có bảng biến thiên:

x	0	3	6	
y'		+	0	-
y			2	

Từ bản biến thiên ta thấy

Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$, giá trị cực đại là $y_{CD} = 2$

j) $y = 2x^2 - 4x - \ln(x-1)$

Lời giải

Tập xác định: $D = (1; +\infty)$

Đạo hàm: $y' = 4x - 4 - \frac{1}{x-1} = \frac{4(x-1)^2 - 1}{x-1} = \frac{4x^2 - 8x + 3}{x-1}$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \text{ (loại)} \\ x = \frac{3}{2} \text{ (nhận)} \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên:

x	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
y'	-	0	+
y		$\ln 2 - \frac{3}{2}$	

Từ bảng biến thiên ta thấy

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{3}{2}$, giá trị cực tiểu là $y_{CT} = \ln 2 - \frac{3}{2}$

Câu 2: Hãy lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của các hàm số:

a) $y = -x^3 + 3x - 2$

b) $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$

Lời giải

a) $y = -x^3 + 3x - 2$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Cách 1: Đạo hàm thuần túy

Đạo hàm: $y' = -3x^2 + 3$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên:



x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-4	0	$-\infty$	

Từ bảng biến thiên ta thấy

Hàm số đạt giá trị cực tiểu tại $x = -1$, giá trị cực tiểu là $y_{CT} = -4$

Hàm số đạt giá trị cực đại tại $x = 1$, giá trị cực đại là $y_{CD} = 0$

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là: $\begin{cases} -a+b=-4 \\ a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow y_{dt} = 2x-2$

Cách 2: Sử dụng công thức

Đối với hàm số bậc 3 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị có phương trình

là phần dư của phép chia y cho y' . Mẹo giải nhanh: $y_{dt} = y - \frac{y' \cdot y''}{18a}$.

Ta có: $y' = -3x^2 + 3$; $y'' = -6x$

$$y_{dt} = (-x^3 + 3x - 2) - \frac{(-3x^2 + 3)(-6x)}{18(-1)} = -x^3 + 3x - 2 + (x^3 - x) = 2x - 2$$

b) $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$

Cách 1: Đạo hàm thuần túy

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Đạo hàm: $y' = \frac{(2x+1)(x+1) - (x^2+x+1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-3	$+\infty$	1	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên ta thấy

Hàm số đạt giá trị cực tiểu tại $x = 0$, giá trị cực tiểu là $y_{CT} = 1$

Hàm số đạt giá trị cực đại tại $x = -2$, giá trị cực đại là $y_{CD} = -3$.



Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là: $\begin{cases} 0.a + b = 1 \\ -2a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow y_{dt} = 2x + 1$

Cách 2: Sử dụng công thức

Đối với hàm phân thức $y = \frac{u}{v}$, phương trình đường thẳng qua 2 điểm cực trị là $y = \frac{u'}{v'}$.

Ta có $u' = 2x + 1$ và $v' = 1$ nên phương trình đường thẳng là $y = 2x + 1$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm: $f'(x) = 2026.x(x-1)(x+2)^3(x-3)^6(x+4)^9(x-5)^{10}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là bao nhiêu?

Trả lời:

4			
---	--	--	--

Lời giải

Điểm cực trị của hàm số là các nghiệm bội lẻ của phương trình $f'(x) = 0$

Các nghiệm bội lẻ bao gồm: $x = 0$ (bậc 1), $x = 1$ (bậc 1), $x = -2$ (bậc 3), $x = -4$ (bậc 9).

Vậy hàm số có 4 điểm cực trị

Câu 4: Thể tích nước của một bể bơi sau t phút bơm được tính theo công thức:

$$V(t) = \frac{1}{100} \left(30t^3 - \frac{t^4}{4} \right) \text{ với } 0 \leq t \leq 90$$

Tốc độ bơm nước ở thời điểm t được tính theo công thức $v(t) = V'(t)$. Tìm thời điểm tốc độ bơm nước là lớn nhất và tính tốc độ bơm nước lớn nhất đó.

Trả lời:

6	0		
---	---	--	--

Lời giải

$$\text{Tốc độ bơm nước } v(t) = V'(t) = \frac{1}{100} (90t^2 - t^3).$$

Để tìm tốc độ bơm lớn nhất, ta tìm giá trị lớn nhất của $v(t)$ trên đoạn $[0; 90]$

$$\text{Đạo hàm: } v'(t) = \frac{1}{100} (180t - 3t^2) = \frac{3t}{100} (60 - t). \text{ Cho } v'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 60 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên trên $[0; 90]$:

t	0	60	90
$v'(t)$		+	0
$v(t)$	0	1080	0

Từ bảng biến thiên ta thấy $v(t)$ đạt cực đại và cũng là giá trị lớn nhất tại $t = 60$.

$$\text{Tại } t = 60: v(60) = \frac{1}{100} (90 \cdot 60^2 - 60^3) = 1080$$

Tốc độ bơm lớn nhất là 1080 (đvtt/phút) tại thời điểm $t = 60$ phút.

----- HẾT -----

**ĐỀ RÈN LUYỆN 02: TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ HÀM SỐ**

Chuyên đề tính đơn điệu của hàm số gồm lý thuyết và ví dụ minh họa

Sưu tầm và biên soạn: Phan Nhật Linh

KẾT NỐI TRI THỨC

Tài liệu khóa học luyện thi THPT Quốc Gia theo chương trình mới

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định với mọi $x \neq -4$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hàm số đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

x	$-\infty$	-7	-4	4	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	14	$+\infty$	6	$-\infty$	$-\infty$

A. $(-7; +\infty)$.**B.** $(-7; -4)$.**C.** $(6; +\infty)$.**D.** $(-7; 4)$.**Lời giải**Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow x = -7, x = 4$.Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -7)$ và $(4; +\infty)$.Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-7; -4)$ và $(-4; 4)$.Do đó hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-7; -4)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau.

x	$-\infty$	6	7	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	0	-2	$+\infty$	

Tìm điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là:**A.** $x = 6$.**B.** $(7; -2)$.**C.** $x = 7$.**D.** $(6; 0)$.**Lời giải**Điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$ là $x = 6$.

Câu 3: Hàm số $y = \sqrt[3]{x^2}$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Tính đạo hàm $y = \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}, (x \neq 0)$

Xét dấu y' ta có: $y' > 0$ với $x \in (0; +\infty)$ và $y' < 0$ với $x \in (-\infty; 0)$.

Vậy hàm số có 1 cực trị.

- Câu 4:** Một vật có phương trình quỹ đạo tính theo thời gian là $s(t) = 5 + 8t - 2t^2$? Tại thời điểm nào, vật cách mốc tính quãng đường khoảng lớn nhất?

- A.** 1 giây. **B.** 2 giây. **C.** 3 giây. **D.** 4 giây.

Lời giải

Do $v(t) = s'(t) = 8 - 4t = 0 \Leftrightarrow 8 - 4t = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Vậy tại thời điểm 2 giây vật cách mốc tính quãng đường khoảng lớn nhất.

- Câu 5:** Cho hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 4$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

- A.** $(0; 2)$. **B.** $(2; +\infty)$. **C.** $(0; +\infty)$. **D.** $(-\infty; 0)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = -x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2.$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.

- Câu 6:** Cho hàm số $y = \frac{2x+8}{5x-9}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** Hàm số luôn đồng biến trên tập xác định
B. Hàm số luôn nghịch biến trên tập xác định
C. Hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định
D. Hàm số luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định

Lời giải

Ta có: $y' = \frac{-58}{(5x-9)^2} < 0, \forall x \neq \frac{9}{5}$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

- Câu 7:** Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 11x - 1}{x - 11}$. Hàm số nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- A.** $(-\infty; 11)$. **B.** $(10; +\infty)$. **C.** $(8; 15)$. **D.** $(-\infty; 6)$.

Lời giải

Ta có: $y' = -\frac{x^2 - 22x + 120}{(x - 11)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 10, x = 12.$

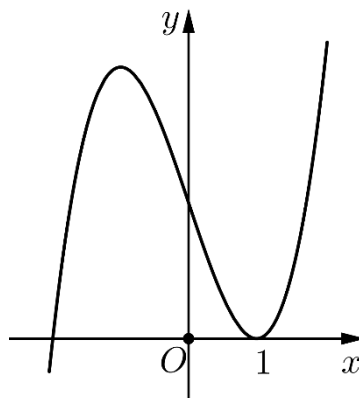
Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 10)$ và $(12; +\infty)$.



Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(10;11)$ và $(11;12)$.

Do đó hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;6)$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Hàm số $y = 2008f(x) + 2026$ đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(1;+\infty)$.

B. $(0;1)$.

C. $(-\infty;2)$.

D. $(-\infty;0)$.

Lời giải

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Câu 9: Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ là:

A. $y = 4x - 2$.

B. $y = 2x + 2$.

C. $y = 4x + 1$.

D. $y = 2x - 2$.

Lời giải

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$$y = \frac{(2x^2 - 2x + 2)'}{(x - 1)'} = 4x - 2$$

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = -f(x) + 2026$ đồng biến trên khoảng $(2;5)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$. Khẳng định nào sau đây là đúng về hàm số $y = f(x)$?

A. đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

B. nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

C. nghịch biến trên khoảng $(3;5)$.

D. đồng biến trên khoảng $(2;5)$.

Lời giải

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3;5)$

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có biểu thức đạo hàm là $y = f'(x) = (x^2 - 1)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y = 2026f(x) + 2027$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Hàm số $y = 2026f(x) + 2027$ có hai điểm cực trị



Câu 12: Một vật dao động có phương trình là $x(t) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)$ cm, t có đơn vị là giây. Mệnh đề nào sau đây đúng? Trong khoảng 2 giây đến 3 giây, vận tốc của vật tăng hay giảm?

- A. Trong khoảng 2 giây đến 3 giây, vận tốc của vật không đổi.
- B. Trong khoảng 2 giây đến 3 giây, vận tốc của vật luôn tăng.
- C. Trong khoảng 2 giây đến 3 giây, vận tốc của vật luôn giảm.
- D. Trong khoảng 2 giây đến 3 giây, vận tốc của vật giảm, sau đó tăng.

Lời giải

$$\text{Vận tốc của vật là: } v(t) = (x(t))' = \left(2\sin\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)\right)' = \pi \cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3}\right).$$

$$\text{Gia tốc của chuyển động là } a(t) = (v(t))' = \left(\pi \cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)\right)' = -\frac{\pi^2}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3}\right).$$

$$2 \leq t \leq 3 \Rightarrow \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3} \leq \frac{7\pi}{6}.$$

Khi đó $\sin\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)$ dương khi $\frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3} < \pi$ và $\sin\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)$ âm khi $\pi < \frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3} \leq \frac{7\pi}{6}$

Do đó $a(t) < 0$ khi $\frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3} < \pi$ và $a(t) > 0$ khi $\pi < \frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3} \leq \frac{7\pi}{6}$.

Vậy lúc đầu vận tốc giảm, sau đó vận tốc tăng.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	1	3	7	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	-17	-13	-18	$+\infty$

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(7; +\infty)$
- b) $f(1) < f(3)$
- c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 7)$
- d) Điểm cực đại của đồ thị hàm số là $x = 3$

Lời giải

- a) Đúng: Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(1; 3)$ và $(7; +\infty)$.
- b) Đúng: $f(1) < f(3)$
- c) Sai: Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(3; 7)$
- d) Sai: Điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(3; -13)$

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{-x+1}$

- a) Hàm số đồng biến trên tập xác định của nó
- b) Hàm số không có cực trị
- c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(2025; 2026)$
- d) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ta có $y' = \frac{3}{(-x+1)^2} > 0$ với mọi $x \neq 1$.

- a) Sai: Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định
- b) Đúng: Hàm số không có cực trị
- c) Đúng: Hàm số đồng biến trên khoảng $(2025; 2026)$
- d) Sai: Khi xét tính đơn điệu, không dùng $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ mà chỉ dùng “và”. “hoặc”

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm là $f'(x) = (x-3)(x-7)(x-11)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

- a) Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là $x = 7$
- b) $f(7)$ là giá trị cực đại của hàm số đã cho
- c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(7; +\infty)$
- d) Hàm số $y = -2026f(x) + 2027$ đồng biến trên hai khoảng $(4; 6)$ và $(2025; 2026)$

Lời giải

a) Sai: Ta xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 7 \\ x = 11 \end{cases}$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$, $(7; 11)$ và đồng biến trên khoảng $(3; 7)$, $(11; +\infty)$.

Nhận $x = 7$ làm điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu là $x = 3, x = 11$

- b) Đúng: $f(7)$ là giá trị cực đại của hàm số đã cho
- c) Sai
- d) Xét $y = -2026f(x) + 2027$ có $y' = -2026f'(x)$. Để hàm số đồng biến $y' \geq 0 \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$.
 Với $x \in (4; 6) \subset (3; 7) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow y' < 0$ (hàm số nghịch biến)
 Với $x \in (2025; 2026) \subset (11; +\infty) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow y' < 0$ (hàm số nghịch biến)

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

- a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$

b) Hàm số $g(x) = -3f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$

c) $f(\sin^2 x) < f\left(\frac{3}{2}\right)$

d) Tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số bằng 0

Lời giải

a) Đúng: Quan sát bảng biến thiên, ta thấy $f'(x) > 0$ (đồng biến) trên $(-\infty; 0), (2; +\infty)$.

b) Sai: Xét $g'(x) = -3f'(x) > 0 \forall x \in (0; 2) \Rightarrow g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

c) Sai: Để ý rằng $\sin^2 x < \frac{3}{2} \Leftrightarrow f(\sin^2 x) > f\left(\frac{3}{2}\right)$ do $f(x)$ nghịch biến trên tập giá trị của $\sin^2 x$ là $T = [0; 1]$

d) Đúng: Giá trị cực đại $y_{CD} = 2$ và giá trị cực tiểu $y_{CT} = -2 \Rightarrow y_{CD} + y_{CT} = 0$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x^2 + 26x + 18}{x + 13}$ có điểm cực tiểu $x = x_1$ và điểm cực đại bằng $x = x_2$.

Tính $P = -2x_1 + x_2$.

Trả lời:

4

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-13\}$

$$f'(x) = \frac{(4x + 26)(x + 13) - (2x^2 + 26x + 18)}{(x + 13)^2} = \frac{2x^2 + 52x + 320}{(x + 13)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -10 \\ x = -16 \end{cases}$$

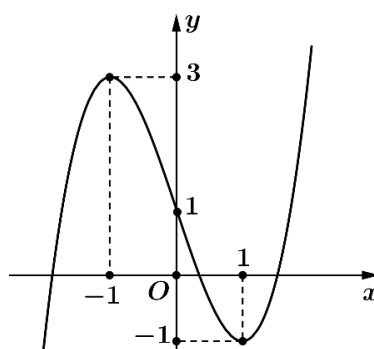
Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-16	-13	-10	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-38	$\searrow$	$+\infty$
				-14	

Từ bảng biến thiên, ta thấy điểm cực tiểu $x_1 = -10$ và điểm cực đại là $x_2 = -16$.

Suy ra $P = -2x_1 + x_2 = 4$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Số khoảng đồng biến của hàm số là bao nhiêu?



**Trả lời:**

2			
---	--	--	--

Lời giải

Quan sát đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ta thấy đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Giả sử các điểm đó là $x = a \in (-\infty; -1)$, $x = b \in (-1; 1)$, $x = c \in (1; +\infty)$.

Trong đó tồn tại 2 khoảng $x \in (a; b)$ và $x \in (c; +\infty)$ mà $f'(x) > 0 \forall x$ (nghĩa là đồng biến).

Nên ta nói có 2 khoảng đồng biến của hàm số đã cho.

Câu 3: Cho hàm số $y = |x^2 - ax + b|$ và tiến hành gieo ngẫu nhiên hai con súc sắc cân đối và đồng chất. Gọi a là số chấm xuất hiện trên con súc sắc thứ nhất và b là số chấm xuất hiện trên con súc sắc thứ hai. Tính xác suất để hàm số này đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$ (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục)

Trả lời:

0	,	9	
---	---	---	--

Lời giải

Tung 2 con xúc xắc đồng thời, ta có không gian mẫu: $6.6 = 36$.

Xét hàm số $f(x) = x^2 - ax + b$ có $f'(x) = 2x - a$. Mà $\begin{cases} a \leq 6 \\ 2x > 10 \end{cases} \Rightarrow f'(x) > 0 \forall x \in (0; +\infty)$.

Vì $f(x)$ luôn đồng biến nên để $y = |f(x)|$ cũng đồng biến trên $(5; +\infty)$ thì phần đồ thị của $f(x)$ trên khoảng nào không được lấy đối xứng qua trục hoành.

Nghĩa là $f(x) \geq 0 \forall x \in (5; +\infty) \Leftrightarrow f(5) \geq 0 \Leftrightarrow 5^2 - 5a + b \geq 0 \Leftrightarrow 5a - b \leq 25$.

Ta xét các trường hợp khả dĩ của $a \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ để tìm $b \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ thỏa $5a - b \leq 25$.

Trường hợp 1: Nếu $a \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Leftrightarrow 5a - b \leq 25 - b \xrightarrow{b \geq 1} 25 - b \leq 24 < 25$. Có $5.6 = 30$ cặp (a, b) thỏa mãn.

Trường hợp 2: Nếu $a = 6 \Leftrightarrow 5.6 - b \leq 25 \Leftrightarrow 30 - b \leq 25 \Leftrightarrow b \geq 5 \xrightarrow{b \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}} b \in \{5; 6\}$.

Suy ra có 2 cặp $(ab) = \{(6; 5), (5; 6)\}$ thỏa mãn.

Vậy xác suất của biến cố: $\frac{30+2}{36} \approx 0,9$.

Câu 4: Cho tập hợp $S = \{1; 2; 3; 4\}$. Gọi m, n là hai số khác nhau được chọn ngẫu nhiên từ S . Xét hàm số bậc ba $y = x^3 - 3mx^2 + 3nx + 2$. Tính xác suất để hàm số có hai điểm cực trị, đồng thời đường thẳng đi qua hai điểm cực trị đó có hệ số góc bằng -14 (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Trả lời:

0	,	0	8
---	---	---	---

Lời giải

Chọn ngẫu nhiên 2 số $m, n \in S$ có thứ tự, không gian mẫu: $A_4^2 = 12$ (cách).

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3n = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + n = 0$.

Biệt thức delta $\Delta' = m^2 - n > 0$.



Thực hiện phép chia đa thức $\frac{y}{y'}$ ta được $y = 2(n - m^2)x + mn + 2$ là đường thẳng đi qua hai điểm

cực trị với $y' = 0 \Rightarrow x^2 - 2mx + n = 0$.

Theo đề bài, $2(n - m^2) = -14 \Leftrightarrow m^2 - n^2 = 7$. Lần lượt thử các giá trị thuộc tập hữu hạn S , ta thấy chỉ có cặp $(m, n) = (3, 2): 3^2 - n = 7 \Leftrightarrow n = 2 \in S$.

Vậy xác suất của biến cố: $\frac{1}{12} \approx 0,08$.

Câu 5: Kính viễn vọng không gian Hubble được đưa vào vũ trụ ngày 24/4/1990 bằng tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong sứ mệnh này, từ lúc cất cánh tại thời điểm $t = 0$ giây cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi tại thời điểm $t = 126$ giây cho bởi hàm số sau đây: $v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23$, (v được tính bằng ft/s, 1 feet = 0,3048 m)



Gọi $(a; b)$ là khoảng thời gian gia tốc của tàu con thoi sẽ tăng tính từ thời điểm cất cánh cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi. Tính $T = a + b$?

Trả lời:

1	4	9	
---	---	---	--

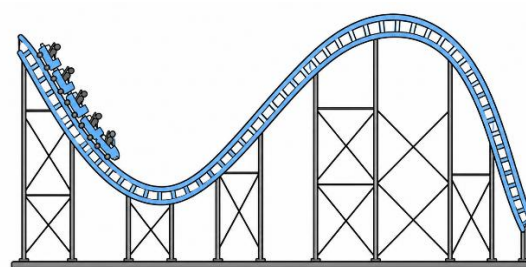
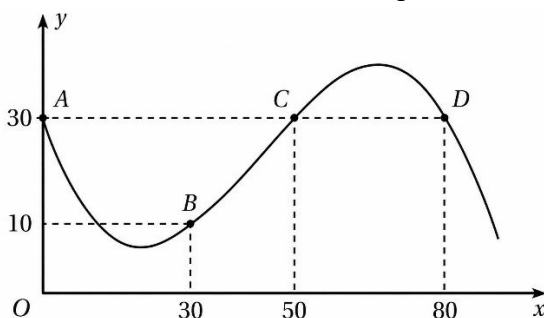
Lời giải

Ta có $a(t) = v'(t) \Rightarrow a(t) = 0,003906t^2 - 0,18058t$.

Khảo sát hàm gia tốc, có $a'(t) = 0,007812t - 0,18058$. Theo đề bài yêu cầu $a(t) > 0$.

Xét bất phương trình $0,007812t - 0,18058 > 0 \Leftrightarrow t > 23 \Rightarrow t \in (23; 126) \Rightarrow a + b = 23 + 126 = 149$

Câu 6: Một phần đường chạy của tàu lượn siêu tốc khi gắn hệ trục tọa độ Oxy được mô phỏng ở hình bên. Biết đường chạy của nó có dạng đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, với $0 \leq x \leq 90$, đơn vị mỗi trục là mét. Biết tàu lượn xuất phát từ điểm A đồng thời đi qua các điểm B, C, D như hình vẽ. Hãy tính độ cao lớn nhất mà tàu lượn siêu tốc đạt được so với mặt đất (xem Ox là mặt đất, tính theo đơn vị mét và kết quả làm tròn đến hàng phần mười)





Trả lời:

3	9	,	9
---	---	---	---

Lời giải

Do đồ thị hàm số đi qua các điểm A, B, C, D ta có hệ:
$$\begin{cases} y(0) = 30 \\ y(30) = 10 \\ y(50) = 30 \\ y(80) = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{1500} \\ b = \frac{13}{150} \\ c = -\frac{8}{3} \\ d = 30 \end{cases} \text{ \$}$$

Suy ra: $y = -\frac{1}{1500}x^3 + \frac{13}{150}x^2 - \frac{8}{3}x + 30$

Khi đó: $y' = -\frac{1}{500}x^2 + \frac{13}{75}x - \frac{8}{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{200}{3} \text{ \$} \\ x = 20 \end{cases}$

Độ cao lớn nhất mà tàu lượn siêu tốc đạt được so với mặt đất là $y\left(\frac{200}{3}\right) = \frac{3230}{81} \approx 39,9$.

----- HẾT -----

**BUỔI 03: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ NÂNG CAO**

Chuyên đề tính đơn điệu của hàm số gồm lý thuyết và ví dụ minh họa

Sưu tầm và biên soạn: Phan Nhật Linh

KẾT NỐI TRI THỨC

Tài liệu khóa học luyện thi THPT Quốc Gia theo chương trình mới

A // LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

Sử dụng quy tắc thứ hai tìm cực trị

Quy tắc 2:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định D của hàm số.
- **Bước 2:** Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ và kí hiệu x_i ($i = 1, 2, \dots$) là các nghiệm của nó
- **Bước 3:** Tính đạo hàm cấp hai $f''(x)$ và tính các giá trị $f''(x_i)$
- **Bước 4:** Dựa vào dấu $f''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i như sau:

 $f''(x_i) > 0$: hàm số đạt cực tiểu tại $x = x_i$ $f''(x_i) < 0$: hàm số đạt cực đại tại $x = x_i$ $f''(x_i) = 0$: chưa đủ cơ sở để kết luận $x = x_i$ có là điểm cực trị hay không**B // VÍ DỤ MINH HỌA****Câu 1:** [PNL] Tìm điểm cực trị của các hàm số sau đây bằng quy tắc thứ hai:

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

Lời giải

Đạo hàm cấp 1: $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$

Đạo hàm cấp 2: $y'' = 6x - 12$

$y''(1) = -6 < 0 \Rightarrow$ Cực đại tại $x = 1, y_{CD} = 5$

$y''(3) = 6 > 0 \Rightarrow$ Cực tiểu tại $x = 3, y_{CT} = 1$

b) $y = \frac{x^2 + x + 2}{x + 1}$

Lời giải

Đạo hàm cấp 1: $y' = 1 - \frac{2}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + \sqrt{2} \\ x = -1 - \sqrt{2} \end{cases}$



Đạo hàm cấp 2: $y'' = \frac{4}{(x+1)^3}$

$$y''(-1+\sqrt{2}) = \frac{4}{(\sqrt{2})^3} > 0 \Rightarrow \text{Cực tiểu tại } x = -1+\sqrt{2}$$

$$y''(-1-\sqrt{2}) = \frac{4}{(-\sqrt{2})^3} < 0 \Rightarrow \text{Cực đại tại } x = -1-\sqrt{2}$$

c) $y = x\sqrt{4-x^2}$

Lời giải

Đạo hàm cấp 1: $y' = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$

Đạo hàm cấp 2: $y'' = \frac{-4x\sqrt{4-x^2} - (4-2x^2) \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2} = \frac{2x^3-12x}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$

$$y''(\sqrt{2}) = \frac{-8\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} < 0 \Rightarrow \text{Cực đại tại } x = \sqrt{2}, y_{CB} = 2$$

$$y''(-\sqrt{2}) = \frac{8\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} > 0 \Rightarrow \text{Cực tiểu tại } x = -\sqrt{2}, y_{CT} = -2$$

d) $y = x^2 \cdot e^{-x}$

Lời giải

$$y' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$y'' = -e^{-x}(2x - x^2) + e^{-x}(2 - 2x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$$

$$y''(0) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Cực tiểu tại } x = 0, y_{CT} = 0$$

$$y''(2) = e^{-2}(4 - 8 + 2) = -2e^{-2} < 0 \Rightarrow \text{Cực đại tại } x = 2, y_{CB} = \frac{4}{e^2}$$

e) $y = 2\sin x - x$ trên khoảng $(0; 2\pi)$

Lời giải

$$y' = 2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

$$y'' = -2\sin x$$



$$y''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} < 0 \Rightarrow \text{Cực đại tại } x = \frac{\pi}{3}, y_{CB} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

$$y''\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \sqrt{3} > 0 \Rightarrow \text{Cực tiểu tại } x = \frac{5\pi}{3}, y_{CT} = -\sqrt{3} - \frac{5\pi}{3}$$

Câu 2: [PNL] Hãy xác định số điểm cực đại, số điểm cực tiểu của các hàm số sau:

a) $y = x(x-2)(x-3)^2(x+4)^3(x-4)^4$

b) $y = x^2(x-1)(x-3)^3(x+4)^4(x-5)^5$

Kỹ năng phân tích đồ thị:

Nguyên tắc phân tích:

Nghiệm bội lẻ (NBL): Đồ thị cắt trục Ox (đổi dấu).

Nghiệm bội chẵn (NBC): Đồ thị tiếp xúc với trục Ox (không đổi dấu, tại đây đồ thị “quay đầu” tạo thành cực trị).

Xét bậc và hệ số: Đa thức bậc lẻ, hệ số cao nhất dương $\rightarrow$ đồ thị đi từ $-\infty$ lên $+\infty$

a) $y = x(x-2)(x-3)^2(x+4)^3(x-4)^4$

Các nghiệm:
$$\begin{cases} x = 0 (NBL) \\ x = 2 (NBL) \\ x = 3 (NBC) \\ x = -4 (NBL) \\ x = 4 (NBC) \end{cases}$$

Phân tích:

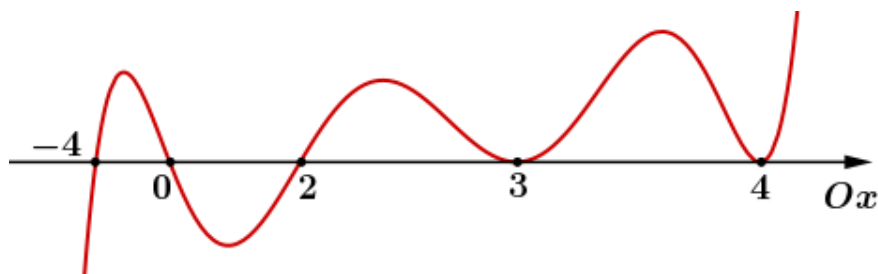
Đồ thị bắt đầu từ dưới $(-\infty)$, đi lên cắt Ox tại $x = -4$ (NBL)

Đi lên đến một điểm cực đại, rồi quay xuống cắt Ox tại $x = 0$ (NBL)

Đi xuống đến một điểm cực tiểu, rồi quay lên cắt Ox tại $x = 2$ (NBL)

Đi lên đến một điểm cực đại rồi đi xuống tiếp xúc với Ox tại $x = 3$ (NBC)

Tiếp tục quay lên, tiếp xúc với Ox tại $x = 4$ (NBC) rồi đi thẳng lên $+\infty$



Đồ thị có 3 điểm cực đại và 3 điểm cực tiểu

b) $y = x^2(x-1)(x-3)^3(x+4)^4(x-5)^5$



Các nghiệm:
$$\begin{cases} x = 0 \text{ (NBC)} \\ x = 1 \text{ (NBL)} \\ x = 3 \text{ (NBL)} \\ x = -4 \text{ (NBC)} \\ x = 5 \text{ (NBL)} \end{cases}$$

Phác họa:

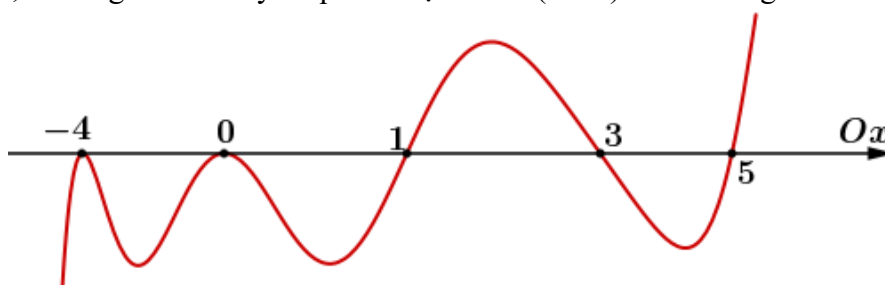
Đồ thị bắt đầu từ dưới $(-\infty)$, đi lên tiếp xúc với Ox tại $x = -4$ (NBC) rồi đổi ngược xuống (tạo thành 1 điểm cực đại trên trục Ox)

Đang ở dưới, vòng lên tiếp xúc với Ox tại $x = 0$ (NBC) rồi lại đổi ngược xuống

Đang ở dưới, đi vòng lên cắt xuyên qua Ox tại $x = 1$ (NBL) để lên phần dương.

Đang ở trên, đi vòng xuống cắt xuyên qua Ox tại $x = 3$ (NBL) để xuống phần âm

Đang ở dưới, đi vòng lên cắt xuyên qua Ox tại $x = 5$ (NBL) rồi đi thẳng lên $+\infty$



Qua phân tích đồ thị, hàm số có 3 điểm cực đại và 3 điểm cực tiểu.

Câu 3: [PNL] Hãy lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của các hàm số:

a) $y = -x^3 + 3x - 2$

b) $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$

Lời giải

a) $y = -x^3 + 3x - 2$

Cách 1: Tự luận truyền thống

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Đạo hàm $y' = -3x^2 + 3$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$			0		$-\infty$

Với $x = 1 \Rightarrow y = 0$. Ta có điểm cực trị $A(1; 0)$

Với $x = -1 \Rightarrow y = -4$. Ta có điểm cực trị $B(-1; -4)$



Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số có dạng $y = ax + b$. Thay tọa độ hai điểm cực trị vào, ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = -4 \\ a = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ a = 2 \end{cases}$$

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $y = 2x - 2$

Cách 2: Sử dụng công thức giải nhanh

Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có phương trình là phần dư của phép chia y cho y' , hoặc áp dụng công thức $y_{DT} = y - \frac{y' \cdot y''}{18a}$.

Ta có: $y' = -3x^2 + 3$; $y'' = -6x$

$$y_{DT} = (-x^3 + 3x - 2) - \frac{(-3x^2 + 3)(-6x)}{18(-1)} = -x^3 + 3x - 2 - (x^3 - x) = 2x - 2$$

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $y = 2x - 2$

b) $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$

Cách 1: Tự luận truyền thống

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Đạo hàm $y' = \frac{(2x+1)(x+1) - (x^2+x+1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$				
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$			
$f(x)$		$\nearrow$	-3	$\searrow$	$+\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$+\infty$

Với $x = 0 \Rightarrow y = 1$. Ta có điểm cực trị $A(0; 1)$

Với $x = -2 \Rightarrow y = -3$. Ta có điểm cực trị $B(-2; -3)$

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số có dạng $y = ax + b$. Thay tọa độ hai điểm cực trị vào, ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 0 \cdot a + b = 1 \\ -2a + b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $y = 2x + 1$

Cách 2: Công thức giải nhanh hàm phân thức

Đối với hàm phân thức dạng $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ (từ bậc hai, mẫu bậc nhất), phương trình đường thẳng đi

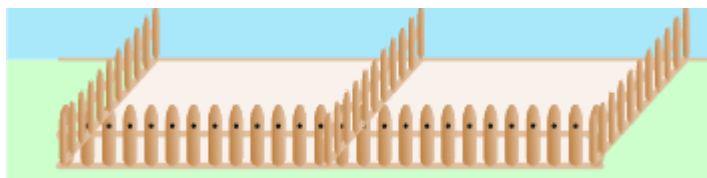
qua các điểm cực trị luôn có dạng $y = \frac{u'(x)}{v'(x)}$



Ta có đạo hàm tử số: $u'(x) = (x^2 + x + 1)' = 2x + 1$ và đạo hàm mẫu số $v'(x) = (x + 1)' = 1$

Phương trình đường thẳng cần tìm là: $y = \frac{2x+1}{1} \Leftrightarrow y = 2x + 1$.

Câu 4: [PNL] Một trang trại có 300 mét lưới thép để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông nhằm mục đích bao quanh hai khu đất trồng trọt hình chữ nhật bằng nhau (như hình). Phía giáp với bờ sông không cần phải rào.



Hỏi tổng diện tích hai khu đất thu được lớn nhất bằng bao nhiêu mét vuông?

Trả lời:

7	5	0	0
---	---	---	---

Lời giải

Gọi x (mét) là chiều dài của mỗi đoạn hàng rào vuông góc với bờ sông. Điều kiện: $x > 0$.

Gọi y (mét) là tổng chiều dài của đoạn hàng rào song song với bờ sông. Điều kiện: $y > 0$.

Theo đề bài, tổng chiều dài lưới thép là 300 mét, do đó ta có phương trình chu vi:

$$3x + y = 300 \Rightarrow y = 300 - 3x$$

$$\text{Để } y > 0 \Leftrightarrow 300 - 3x > 0 \Rightarrow 0 < x < 100$$

Tổng diện tích của hai khu đất là: $S = x \cdot y \Leftrightarrow S(x) = x(300 - 3x) = -3x^2 + 300x$

Cách 1: Sử dụng đạo hàm

Xét hàm số $S(x) = -3x^2 + 300x$ trên khoảng $(0; 100)$

Ta có đạo hàm: $S'(x) = -6x + 300$

Cho $S'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x + 300 = 0 \Rightarrow x = 50$ (thỏa mãn điều kiện).

Vì hệ số $a = -3 < 0$ nên đây là một parabol bề lõm hướng xuống, hàm số đạt giá trị lớn nhất tại đỉnh $x = 50$. Ta lập được bảng biến thiên:

x	0	50	100
$C'(x)$	+	0	-
$C(x)$		7500	

Diện tích lớn nhất là: $S_{\max} = S(50) = -3 \cdot 50^2 + 300 \cdot 50 = 7500$

Cách 2: Sử dụng Bất đẳng thức AM-GM / Cauchy



Biến đổi hàm diện tích một chút để xuất hiện tổng không đổi: $S = x(300 - 3x) = \frac{1}{3} \cdot 3x(300 - 3x)$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương là $3x$ và $300 - 3x$

$$3x(300 - 3x) \leq \left(\frac{3x + 300 - 3x}{2} \right)^2 = \left(\frac{300}{2} \right)^2 = 150^2 = 22500 \Rightarrow S \leq \frac{22500}{3} = 7500$$

Dấu "=" xảy ra khi $3x = 300 - 3x \Leftrightarrow 6x = 300 \Rightarrow x = 50$ (thỏa mãn).

Khi đó $y = 300 - 3 \cdot 50 = 150$

Vậy tổng diện tích hai khu đất thu được lớn nhất là 7500 m^2 (khi các cạnh vuông góc với sông dài 50m và cạnh song song với sông dài 150m).

Câu 5: **[PNL]** Một công ty bán lẻ điện thoại di động dự báo sẽ bán được 1440 chiếc điện thoại mẫu mới ra mắt trong năm tới. Chi phí cho mỗi lần đặt hàng (bao gồm phí vận chuyển, xử lý, hành chính.) là 2500000 VNĐ. Chi phí lưu kho cho mỗi chiếc điện thoại trong một năm (bao gồm tiền thuê kho, bảo hiểm, rủi ro hư hỏng.) được tính là 500.000 VNĐ. Công ty muốn xác định số lượng điện thoại cần đặt trong mỗi lần hàng (kích cỡ lô hàng) để tổng chi phí tồn kho hàng năm là thấp nhất. Hỏi mỗi lần công ty nên đặt bao nhiêu chiếc điện thoại để tối ưu hóa chi phí?

Trả lời:

1	2	0	
---	---	---	--

Lời giải

Gọi x là số lượng điện thoại cần đặt trong mỗi đơn hàng (kích cỡ lô hàng). Điều kiện: $x \in \mathbb{N}^*$ và $x \leq 1440$ Tổng chi phí tồn kho hàng năm $C(x)$ bao gồm hai thành phần:

Tổng chi phí đặt hàng: Số lần đặt hàng trong năm là $\frac{1440}{x}$ (lần)

Chi phí đặt hàng mỗi năm: $C_{DH} = \frac{1440}{x} \cdot 2500000 = \frac{3600000000}{x}$ (VNĐ)

Tổng chi phí lưu kho: Lượng hàng tồn kho trung bình là $\frac{x}{2}$ (chiếc)

Chi phí lưu kho mỗi năm: $C_{LK} = \frac{x}{2} \cdot 500000 = 250000x$ (VNĐ)

Hàm tổng chi phí cần tối ưu là: $C(x) = 250000x + \frac{3600000000}{x}$

Cách 1: Đạo hàm truyền thống

Xét hàm số: $C(x) = 250000x + \frac{3600000000}{x}$ trên nửa khoảng $(0; 1440]$

Đạo hàm: $C'(x) = 250000 - \frac{3600000000}{x^2}$. Cho $C'(x) = 0 \Rightarrow x = 120$

Ta có bảng biến thiên :

x	0	120	1440
$C'(x)$	—	0	+
$C(x)$			

Vậy cần đặt 120 chiếc điện thoại mỗi lần.

Cách 2: Giải bằng Bất đẳng thức AM-GM

Vì $x > 0$ nên $250000x > 0$ và $\frac{3600000000}{x} > 0$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM (Cauchy) cho hai số thực dương, ta có:

$$C(x) = 250000x + \frac{3600000000}{x} \geq 2\sqrt{250000x \cdot \frac{3600000000}{x}} \Leftrightarrow C(x) = 60000000$$

Vậy tổng chi phí nhỏ nhất là 60.000.000 VNĐ.

Dấu "=" của bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hai số hạng bằng nhau:

$$250000x = \frac{3600000000}{x} \Rightarrow x = 120$$

Để chi phí thấp nhất, mỗi lần hàng nên đặt 120 chiếc.

Câu 6: [PNL] Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + mx + n}{x - p}$ có đồ thị là (C) . Các tham số m, n, p được xác định

bằng kết quả của phép thử gieo một cặp súc sắc cân đối đồng chất ba lần một cách độc lập (m là tổng số chấm xuất hiện trong lần gieo thứ nhất, n là tổng số chấm xuất hiện trong lần gieo thứ hai, p là tổng số chấm xuất hiện trong lần gieo thứ ba). Tính xác suất để đồ thị hàm số (C) có hai điểm cực trị, đồng thời đường thẳng đi qua hai điểm cực trị đó cắt trục tung tại một điểm có tung độ lớn hơn 7 (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Trả lời:

0	,	4	2
---	---	---	---

Lời giải

Xét hàm số: $y = f(x) = \frac{x^2 + mx + n}{x - p}$. TXĐ $D = \mathbb{R} \setminus \{p\}$.

$$\text{Đạo hàm: } y' = f'(x) = \frac{(2x + m)(x - p) - (x^2 + mx + n)}{(x - p)^2} = \frac{x^2 - 2px - mp - n}{(x - p)^2}$$

Để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị thì phương trình $y' = 0$, hay tử số $(x) = x^2 - 2px - mp - n = 0$ phải có 2 nghiệm phân biệt khác p .

$$\text{Điều kiện là: } \Delta' = (-p)^2 - 1(-mp - n) = p^2 + mp + n > 0$$

$$\text{Khi đó: } g(p) = p^2 - 2p(p) - mp - n = -p^2 - mp - n \neq 0$$

Vì m, n, p là tổng số chấm của 2 viên súc sắc nên $m, n, p \in [2; 12]$



Do đó: $p^2 + mp + n \geq 2^2 + 2 \cdot 2 + 2 = 10 > 0 \Leftrightarrow -p^2 - mp - n \leq -10 \neq 0$

Với mọi kết quả gieo súc sắc, hàm số luôn có 2 điểm cực trị.

Biến cố thỏa mãn yêu cầu bài toán chỉ phụ thuộc vào m (tổng số chấm trong lần gieo thứ nhất của một cặp súc sắc), không phụ thuộc vào n và p .

Số chấm gieo được của một cặp súc sắc là $m \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$.

Tổng số kết quả có thể xảy ra trong 1 lần gieo 2 viên súc sắc là $n(\Omega) = 6 \cdot 6 = 36$

Ta cần tìm số kết quả thuận lợi cho biến cố $m > 7 \Rightarrow m \in \{8; 9; 10; 11; 12\}$

Với $m = 8$: Có 5 trường hợp $(2; 6), (3; 5), (4; 4), (5; 3), (6; 2)$

Với $m = 9$: Có 4 trường hợp $(3; 6), (4; 5), (5; 4), (6; 3)$

Với $m = 10$: Có 3 trường hợp $(4; 6), (5; 5), (6; 4)$

Với $m = 11$: Có 2 trường hợp $(5; 6), (6; 5)$

Với $m = 12$: Có 1 trường hợp $(6; 6)$

Tổng số kết quả thuận lợi cho lần gieo thứ nhất là: $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$

Xác suất để $m > 7$ là: $P = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \approx 0,42$

----- HẾT -----



**ĐỀ RÈN LUYỆN 03: TOÁN THỰC TẾ ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ**

Chuyên đề tính đơn điệu của hàm số gồm lý thuyết và ví dụ minh họa

Sưu tầm và biên soạn: Phan Nhật Linh

KẾT NỐI TRI THỨC

Tài liệu khóa học luyện thi THPT Quốc Gia theo chương trình mới

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Một vật chuyển động với vận tốc (m/s) được xác định bởi hàm số $f(t) = -t^3 + 3t^2$ với $t \geq 0$. Khi đó $f'(t)$ là gia tốc của vật tại thời điểm t (giây). Vận tốc của vật đạt được cao nhất trong khoảng thời gian 3 giây đầu là bao nhiêu (m/s)?

A. 6.**B.** 2.**C.** 4.**D.** 3.**Lời giải**

$$\text{Ta có: } f'(t) = -3t^2 + 6t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 0 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

t	0	2	3
$f'(t)$		+	0
$f(t)$		↗	↘

Vận tốc của vật đạt được cao nhất là 4 (m/s)

Câu 2: Doanh số bán hàng của một loại sản phẩm (chục triệu đồng) trong một phiên livestream bán hàng kéo dài sáu giờ theo quy luật hàm số $f(t) = \frac{3t}{e^2}$, $0 \leq t \leq 6$ trong đó thời gian t được tính bằng

giờ kể từ khi bắt đầu livestream. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau bao nhiêu giờ kể từ khi bắt đầu phiên livestream thì doanh số bán hàng là lớn nhất?

A. 5 giờ.**B.** 3 giờ.**C.** 1 giờ.**D.** 2 giờ.**Lời giải**

$$\text{Ta có: } f'(t) = \frac{6-3t}{e^2} = 0 \Leftrightarrow 6-3t = 0 \Leftrightarrow t = 2. \text{ Bảng biến thiên với } t \in [0; 6]:$$

t	0	2	6
$f'(t)$		+	0
$f(t)$		↗	↘

Vậy sau 2 giờ kể từ khi bắt đầu phiên livestream thì doanh số bán hàng là lớn nhất.



Câu 3: Một cửa hàng cà phê bán cà phê espresso, nhận thấy rằng lợi nhuận của cửa hàng y (tính theo đơn vị triệu đồng/ngày) phụ thuộc vào giá bán x (chục nghìn đồng) mỗi ly espresso. Qua khảo sát, cửa hàng mô tả lợi nhuận theo hàm số sau: $y = -2x^4 + 36x^2 - 90$. Hỏi cửa hàng nên chọn mức giá mỗi ly là bao nhiêu để lợi nhuận tối ưu nhất?

A. 10 nghìn đồng. B. 20 nghìn đồng. C. 30 nghìn đồng. D. 40 nghìn đồng.

Lời giải

Ta có: $y' = -8x^3 + 72x$ và giải phương trình $y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 3 \end{cases}$

Với đồ thị hàm bậc 4 trùng phương hệ số $a < 0$, ta chọn $x = 3$ để hàm số đạt cực đại.

Vậy giá bán để tối ưu lợi nhuận là 30 nghìn đồng/ly.

Câu 4: Tốc độ trung bình y (km/h) của một chiếc xe bus phụ thuộc vào số lượng hành khách x (người) trên xe, được biểu diễn bởi hàm số $y = \frac{-2x + 120}{0,5x + 2}$. Hỏi tốc độ trung bình của xe bus khi không có khách là bao nhiêu?

A. 60 km/h. B. 70km/h. C. 120km/h. D. 40km/h.

Lời giải

Khi không có khách trên xe, ta có $x = 0$ suy ra $y = \frac{-2.0 + 120}{0,5.0 + 2} = 60$

Câu 5: Khi loại thuốc A được tiêm vào bệnh nhân, nồng độ mg / L của thuốc trong máu sau x phút (kể từ khi bắt đầu tiêm) được xác định bởi công thức: $C(x) = \frac{30x}{x^2 + 2}$. (Nguồn: James Stewart, J. (2015). *Calculus. Cengage Learning*). Để đưa ra những lời khuyên và cách xử lý phù hợp cho bệnh nhân, ta cần tìm khoảng thời gian mà nồng độ của thuốc trong máu đang tăng. Em hãy cho biết hàm nồng độ thuốc trong máu $C(x)$ đạt giá trị cực đại là bao nhiêu trong khoảng thời gian 6 phút sau khi tiêm (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?

A. 11,6. B. 10,6. C. 10,5. D. 10,7.

Lời giải

Xét hàm số $y = C(x) = \frac{30x}{x^2 + 2}$ trên khoảng $x \in (0; 6)$ có $y' = \frac{-30x^2 + 60}{(x^2 + 2)^2}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{-30x^2 + 60}{(x^2 + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases} \text{ do } x \in (0; 6) \Rightarrow x = \sqrt{2}.$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\sqrt{2}$	6	
y'		+	0	-
y	0	$\frac{15\sqrt{2}}{2}$	$\frac{90}{19}$	



Nồng độ thuốc trong máu $C(x)$ đạt giá trị cực đại là $\frac{15\sqrt{2}}{2}(\text{mg/L}) \approx 10,6(\text{mg/L})$ trong khoảng thời gian 6 phút sau khi tiêm.

- Câu 6:** Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 2$ với $t \geq 0$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Trong khoảng thời gian nào vận tốc của vật tăng?
- A. $(0; +\infty)$. B. $(0; 3)$. C. $(-4; +\infty)$. D. $(3; +\infty)$.

Lời giải

Ta có vận tốc của chuyển động tại thời điểm t bằng đạo hàm cấp một của phương trình chuyển động tại thời điểm t .

$$\text{Ta có: } v(t) = S'(t) = \left(\frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 2 \right)' = t^2 - 6t + 5$$

Xét hàm số $v(t) = t^2 - 6t + 5$ với $t \geq 0$. Ta có $v'(t) = 2t - 6 \Leftrightarrow 2t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 3$

Bảng biến thiên:

t	0	3	$+\infty$
$v'(t)$		0	
		-	+
$v(t)$	5	-4	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có trong khoảng thời gian $(3; +\infty)$ thì vận tốc của vật tăng.

- Câu 7:** Giả sử số lượng quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hóa bằng hàm số $P(t) = \frac{25}{0,25 + e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tốc độ sinh trưởng của quần thể nấm men ở thời điểm t được tính theo công thức $P'(t)$. Số lượng quần thể nấm men có thể tăng lên nhưng không vượt quá bao nhiêu
- A. 99. B. 101. C. 100. D. 102

Lời giải

Ta có $P'(t) = \frac{18,75 \cdot e^{-0,75t}}{(0,25 + e^{-0,75t})^2} > 0, \forall t > 0$. Suy ra số lượng quần thể nấm men được nuôi cấy luôn tăng.

$$\text{Ta lại có } \lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25}{0,25 + e^{-0,75t}} = 100.$$

Do đó, số lượng quần thể nấm men tăng nhưng không vượt quá 100.

- Câu 8:** Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -\frac{t^3}{3} + 9t^2 - 17t + 10$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Trong 30 giây đầu tiên, chất điểm có vận tốc tức thời giảm trong khoảng thời gian $(a; b)$. Giá trị của biểu thức $P = 3b - 4a$ là
- A. 47. B. 54. C. 39. D. 63.

Lời giải



Vận tốc tức thời của chất điểm là $v(t) = s'(t) = -t^2 + 18t - 17$.

Gia tốc tức thời của chất điểm là $a(t) = v'(t) = -2t + 18$

Vì vận tốc tức thời của chất điểm giảm nên $a(t) < 0 \Leftrightarrow -2t + 18 < 0 \Leftrightarrow t > 9$.

Do đó, trong 30 giây đầu tiên, chất điểm có vận tốc tức thời giảm trong khoảng thời gian $(9; 30)$

Suy ra $a = 9$, $b = 30$ nên $P = 3b - 4a = 54$.

- Câu 9:** Sự tăng trưởng của một loại virus được xác định bởi hàm số $p(t) = \frac{800}{1 + 7e^{-0,2t}}$, trong đó t là thời gian được tính theo ngày, tốc độ tăng trưởng của virus được tính theo hàm số $p'(t)$. Thời gian tăng trưởng của loài virus trên thuộc khoảng $(0; a \ln b)$ với $a, b \in \mathbb{N}$. Khi đó $a + b$ bằng
- A.** 12. **B.** 14. **C.** 15. **D.** 36.

Lời giải

Tốc độ tăng trưởng của virus được tính theo hàm số $y = p'(t) = \frac{1120 \cdot e^{0,2t}}{(e^{0,2t} + 7)^2}$, $t \geq 0$.

Xét hàm số $y = g(t) = \frac{1120 \cdot e^{0,2t}}{(e^{0,2t} + 7)^2}$, có $g'(t) = \frac{224 \cdot e^{0,2t} (7 - e^{0,2t})}{(e^{0,2t} + 7)^3}$.

$g'(t) = 0 \Leftrightarrow 7 - e^{0,2t} = 0 \Leftrightarrow t = 5 \ln 7$.

Ta có bảng dấu của $g'(t)$ như sau:

t	0		$5 \ln 7$		$+\infty$
g'		+	0	-	

Dựa vào bảng trên ta thấy thời gian tăng trưởng của virus sẽ nằm trong khoảng $(0; 5 \ln 7)$

Vậy $a + b = 12$

- Câu 10:** Vận tốc của một tàu con thoi từ lúc cất cánh tại thời điểm $t = 0$ (s) cho đến thời điểm $t = 126$ (s) được cho bởi công thức $v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 83$ (vận tốc được tính bằng đơn vị ft/s). Hỏi tại thời điểm tàu con thoi đạt gia tốc nhỏ nhất thì vận tốc tàu con thoi gần bằng bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).
- A.** 22,81. **B.** 23,81. **C.** 23,03. **D.** 20,84.

Lời giải

Ta có: $a(t) = v'(t) = 0,003906t^2 - 0,18058t$

Bảng biến thiên của hàm $a(t) = 0,003906t^2 - 0,18058t$.

Thời điểm tàu con thoi đạt gia tốc nhỏ nhất là $t \approx 23,1157$

Khi đó: $v(23,1157) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 83 \approx 20,84$ ft/s

- Câu 11:** Một tia sáng phát ra từ điểm $A(0; 3)$ trong không khí (vận tốc ánh sáng trong không khí bằng $v_1 = c$, với $c = 3 \cdot 10^8$ m/s), truyền tới điểm $B(6; -4)$ trong nước (vận tốc ánh sáng trong nước là

$v_2 = \frac{3c}{4}$). Mặt phân cách giữa không khí và nước là đường thẳng $y = 0$ (trục hoành trong mặt phẳng toạ độ Oxy). Giả sử tia sáng đi qua $M(x, 0)$ trên mặt phân cách để tổng thời gian truyền là nhỏ nhất. x bằng bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

A. 3,32.**B.** 2,97.**C.** 4,59.**D.** 5,22.**Lời giải**

Giả sử tia sáng đi qua $M(x, 0)$ trên mặt phân cách.

$$\text{Suy ra } \overline{AM} = (x; -3); \overline{BM} = (x-6; 4) \Rightarrow AM = \sqrt{x^2 + 9}; BM = \sqrt{(x-6)^2 + 16}.$$

Tổng thời gian ánh sáng đi từ A đến B là: $\frac{\sqrt{x^2 + 9}}{c} + \frac{4\sqrt{(x-6)^2 + 16}}{3c}$, để thời gian nhỏ nhất thì

$$T(x) = \sqrt{x^2 + 9} + \frac{4\sqrt{(x-6)^2 + 16}}{3} \text{ nhỏ nhất. Khi đó } T'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} + \frac{4(x-6)}{3\sqrt{(x-6)^2 + 16}}$$

$$T'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} + \frac{4(x-6)}{3\sqrt{(x-6)^2 + 16}} = 0 \Rightarrow x \approx 3,32. \text{ Vậy } x \approx 3,32$$

Câu 12: Nồng độ C của một hoá chất sau t giờ tiêm vào cơ thể được xác định bởi công thức sau đây

$C(t) = \frac{3t}{27+t^3}$ với $t \geq 0$. Sau khoảng bao nhiêu giờ tiêm thì nồng độ của hoá chất trong máu là lớn nhất?

A. 2,38.**B.** 3.**C.** 2,12.**D.** 13,5.**Lời giải**

$$\text{Ta có } C'(t) = \frac{3(27+t^3) - 3t \cdot 3t^2}{(27+t^3)^2} = \frac{81-6t^3}{(27+t^3)^2} \text{ có } \begin{cases} C'(t) = 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{3}{\sqrt[3]{2}}.$$

Ta có bảng biến thiên:

t	0	$\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$	$+\infty$
$C'(t)$	+	0	-
$C(t)$	0	$\frac{6}{27\sqrt[3]{2}}$	0

Do đó ở thời điểm $\frac{3}{\sqrt[3]{2}} \approx 2,38$ giờ thì nồng độ của hoá chất trong máu là lớn nhất.

Câu 13: Một phần đường ray tàu lượn siêu tốc có dạng đồ thị hàm số bậc ba được cho bởi công thức sau đây: $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$). Trục Ox mô tả quãng đường đi của tàu di chuyển theo chiều ngang (tính bằng mét). Trục Oy mô tả chiều cao của đường ray (tính bằng mét) tại mỗi vị trí của x . Chiều cao xuất phát của tàu là 50m. Tàu xuống dưới mặt đất lần thứ nhất từ vị trí $x = 20$ m, tàu lên khỏi mặt đất ở vị trí $x = 50$ m và sau đó xuống dưới mặt đất lần thứ hai ở vị



trí $x = 100$ m. Xét $x \in [20; 100]$, khi đó tàu cách mặt đất một khoảng lớn nhất bằng bao nhiêu mét?

- A. 50. B. $\frac{200}{7}$. C. 30. D. 18

Lời giải

Ta có: $f(x) = a(x-20)(x-50)(x-100)$

Vì $f(0) = 50 \Rightarrow a = \frac{-1}{2000}$ nên $f(x) = \frac{-1}{2000}(x-20)(x-50)(x-100)$

Khi đó $f'(x) = \frac{-3x^2}{2000} + \frac{17}{100}x - 4$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 80 \\ x = \frac{100}{3} \end{cases}$

Với $x = 80 \Rightarrow y = 18$ và $x = \frac{100}{3} \Rightarrow y = \frac{-200}{27}$

Vì $|18| > \left| \frac{-200}{27} \right| \Rightarrow$ Tàu cách mặt đất một khoảng lớn nhất bằng 18 m

Câu 14: Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t) = \frac{5000}{1+5e^{-t}}$, $t \geq 0$ trong đó

thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất?

- A. 1,5 năm. B. 1,4 năm. C. 2,1 năm. D. 1,6 năm.

Lời giải

Ta có: $f'(t) = \frac{-5000(1+5e^{-t})'}{(1+5e^{-t})^2} = \frac{25000e^{-t}}{(1+5e^{-t})^2}$

Tốc độ bán hàng là lớn nhất khi $f'(t)$ lớn nhất. Đặt $h(t) = \frac{25000e^{-t}}{(1+5e^{-t})^2}$.

$$h'(t) = \frac{-25000e^{-t}(1+5e^{-t})^2 - 2 \cdot (-5e^{-t}) \cdot (1+5e^{-t}) \cdot 25000e^{-t}}{(1+5e^{-t})^4}$$

$$= \frac{-25000e^{-t}(1+5e^{-t})(1+5e^{-t}-10e^{-t})}{(1+5e^{-t})^4} = \frac{-25000e^{-t}(1-5e^{-t})}{(1+5e^{-t})^3}$$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{-25000e^{-t}(1-5e^{-t})}{(1+5e^{-t})^3} = 0 \Leftrightarrow 1-5e^{-t} = 0 \Leftrightarrow e^{-t} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow t = \ln 5 (tm)$$

Ta có bảng biến thiên với $t \in [0; +\infty)$:

t	0	$\ln 5$	$+\infty$
$h'(t)$	+	0	-
$h(t)$			



Vậy sau khi phát hành khoảng $\ln 5 \approx 1,6$ năm thì thị tốc độ bán hàng là lớn nhất.

Câu 15: Trên một đoạn đường, một xe chạy với tốc độ không đổi với chi phí bảo trì bao gồm hai phần. Phần thứ nhất không phụ thuộc vào tốc độ và mất 400 nghìn đồng/giờ. Phần thứ hai tỉ lệ thuận với bình phương của vận tốc, khi $v = 20$ (km/h) thì chi phí phần thứ hai là 100 nghìn đồng/giờ. Tổng chi phí bảo trì của xe khi chạy 10 km là bao nhiêu?

A. 20000 nghìn đồng. **B.** 100 nghìn đồng. **C.** 40 nghìn đồng. **D.** 200 nghìn đồng.

Lời giải

Gọi vận tốc xe chạy là x (km/h).

Thời gian xe chạy hết 10 km là $\frac{10}{x}$ (giờ).

Chi phí phần thứ nhất là $C_1 = 400 \cdot \frac{10}{x}$ nghìn đồng.

Giả sử chi phí phần thứ hai $C_2 = k \cdot v^2$. Tại $v = 20$ thì $C_2 = 100$ suy ra $k = \frac{100}{20^2} = \frac{1}{4}$.

Khi đó, tổng chi phí phần thứ hai là $C_2 = \frac{1}{4} \cdot x^2 \cdot \left(\frac{10}{x}\right) = \frac{5x}{2}$ nghìn đồng.

Tổng chi phí là $C = C_1 + C_2 = \frac{4000}{x} + \frac{5x}{2}$ nghìn đồng.

Do $\frac{4000}{x} + \frac{5x}{2} \geq 2\sqrt{\frac{4000}{x} \cdot \frac{5x}{2}} = 200$ (nghìn đồng) nên tổng chi phí nhỏ nhất là 200 (nghìn đồng).

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. **[PNL]** Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Một chất điểm chuyển động trên trục Ox với phương trình $x(t) = -t^3 + 6t^2$ (x tính bằng mét, t tính bằng giây, với $t \geq 0$).

a) Trong khoảng thời gian từ $t = 0$ đến $t = 3$ giây, chất điểm chuyển động ngược với chiều dương của trục Ox .

b) Vận tốc trung bình của chất điểm trong khoảng thời gian từ $t = 0$ đến $t = 4$ giây bằng 6 m/s.

c) Vận tốc đạt cực đại tại thời điểm $t = 2$ giây.

d) Trong khoảng thời gian từ $t = 2$ đến $t = 4$ giây chất điểm chuyển động chậm dần.

Lời giải

Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t là: $v(t) = x'(t) = -3t^2 + 12t$.

a) Sai: $v(t) = -3t^2 + 12t = 3t(4 - t) > 0, \forall t: 0 < t < 4$.

Vậy trong khoảng thời gian từ $t = 0$ đến $t = 4$ giây chất điểm động theo chiều dương của trục Ox .

b) Sai: Ta có $x(0) = 0; x(4) = 32$ nên $v_{tb} = \frac{x(4) - x(0)}{4 - 0} = \frac{32}{4} = 8$ (m/s)



c) Đúng: Ta có $v'(t) = -6t + 12$ và giải $v'(t) = 0 \Leftrightarrow -6t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Ta thấy $v'(t)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua $t = 2$ nên vận tốc đạt cực đại tại $t = 2$.

d) Đúng: Ta có $a(t) = v'(t) = -6t + 12$ và giải $a(t) = 0 \Leftrightarrow -6t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Trong khoảng thời gian từ $t = 2$ đến $t = 4$, ta thấy $a(t) < 0$ và $v(t) > 0$.

Vậy chất điểm chuyển động chậm dần trong khoảng thời gian từ $t = 2$ đến $t = 4$ giây.

Câu 2: Một chất điểm chuyển động trên một trục nằm ngang, chiều dương từ trái sang phải. Giả sử tại thời điểm t giây ($t \geq 0$), vị trí của chất điểm được xác định bởi công thức:

$$S(t) = -t^3 + 9t^2 + 21t + 1 \text{ đơn vị mét.}$$

a) Vị trí chất điểm tại thời điểm 4 giây là 164m.

b) Vận tốc đạt được của chất điểm tại thời điểm 2 giây là 45(m/s).

c) Gia tốc của chất điểm tại thời điểm chất điểm dừng lại là 36(m/s²).

d) Vị trí chất điểm tại thời điểm vận tốc đạt giá trị lớn nhất là 118 m.

Lời giải

a) Sai: Ta có: $S(4) = -4^3 + 9 \cdot 4^2 + 21 \cdot 4 + 1 = 165 \text{ m}$

b) Đúng: Vận tốc của chất điểm là $v(t) = S'(t) = -3t^2 + 18t + 21$.

Do đó: $v(2) = -3 \cdot 2^2 + 18 \cdot 2 + 21 = 45 \text{ (m/s)}$.

c) Sai: Khi vật dừng thì vận tốc bằng 0 nên $v(t) = S'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 7 \end{cases}$.

Vậy gia tốc của chất điểm tại thời điểm nó dừng $a(7) = S''(7) = -6 \cdot 7 + 18 = -24 \text{ (m/s}^2\text{)}$

d) Đúng: Ta có: $v(t) = S'(t) = -3t^2 + 18t + 21$ và $a(t) = v'(t) = -6t + 18$.

Ta có bảng biến thiên:

t	0	3	$+\infty$
$v'(t)$		+	0
			-
$v(t)$	21	28	$-\infty$

Vậy vận tốc chất điểm lớn nhất tại thời điểm $t = 3$, khi đó vị trí chất điểm có tọa độ theo phương ngang là: $S(3) = -3^3 + 9 \cdot 3^2 + 21 \cdot 3 + 1 = 118 \text{ m}$.

Câu 3: Giả sử một vật chuyển động trên một đường thẳng vuông góc với mặt đất. Độ cao của vật so với mặt đất (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 9t$, $0 \leq t \leq 10$.



- a) Hàm vận tốc của chuyển động nói trên là $v(t) = -t^2 + 8t + 9$ (đơn vị: mét/giây).
- b) Vận tốc triệt tiêu tại thời điểm $t = 4$ (giây).
- c) Trong 10 giây đầu tiên, vật chuyển động lên trên.
- d) Vật có vận tốc tức thời lớn nhất bằng 25 mét/giây trong 10 giây đầu tiên.

Lời giải

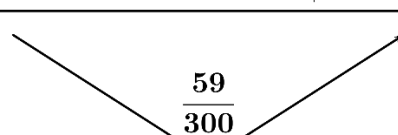
- a) Đúng: $v(t) = s'(t) = -t^2 + 8t + 9$ (đơn vị: mét/giây).
- b) Sai: $v(t) = 0 \Leftrightarrow -t^2 + 8t + 9 = 0$, lúc đó vì $0 \leq t \leq 10$ nên $t = 9$ (giây).
- c) Sai: Với $0 \leq t \leq 10$ thì: $v(t) > 0$ khi $0 < t < 9$
 $v(t) < 0$ khi $9 < t < 10$ nên trong khoảng thời gian $9 < t < 10$ thì vật chuyển động xuống dưới.
- d) Đúng: $v'(t) = -2t + 8$ ta lập bảng biến thiên của hàm số $v(t)$, $0 \leq t \leq 10$ ta có vận tốc tức thời đạt giá trị lớn nhất bằng 25 m/s.

Câu 4: Kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam trong các năm từ 2010 đến 2017 có thể được tính xấp xỉ bằng công thức $f(x) = 0,01x^3 - 0,04x^2 + 0,25x + 0,44$ (tỉ USD) với x là số năm tính từ 2010 đến 2017 ($0 \leq x \leq 7$). (Theo: <https://infographics.vn/interactive-xuat-khau-rau-qua- du-bao-bung-no-dat-4-ty-usd-trong-nam-2023/116220.vna>)

- a) Tốc độ thay đổi của kim ngạch xuất khẩu $f'(x) = 0,03x^2 - 0,08x + 0,25$
- b) Tốc độ thay đổi của kim ngạch xuất khẩu thấp nhất trong các năm từ 2010 đến 2017 bằng 0,2 (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục)
- c) Kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam tăng liên tục trong các năm từ 2010 đến 2017.
- b) Tỷ lệ tốc độ thay đổi so với giá trị kim ngạch xuất khẩu lớn nhất đầu năm 2015

Lời giải

- a) Đúng: Tốc độ thay đổi của kim ngạch xuất khẩu: $f'(x) = 0,03x^2 - 0,08x + 0,25$
- b) Đúng: $f''(x) = 0,06x - 0,08$; $f''(x) = 0 \Rightarrow 0,06x - 0,08 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

x	0	$\frac{4}{3}$	7
$f''(x)$	—	0	+
$f'(x)$			

Tốc độ thay đổi của kim ngạch xuất khẩu thấp nhất bằng $\frac{59}{300} \approx 0,2$

- c) Đúng: Xét $f'(x) = 0,03x^2 - 0,08x + 0,25$

$$\Rightarrow \Delta' = (-0,08)^2 - 0,03 \cdot 0,25 = -\frac{11}{10000} < 0$$



mà $a = 0,03 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ luôn đồng biến trên $[0; 7]$

Vậy kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam tăng liên tục trong các năm từ 2010 đến 2017.

d) Sai: Tỷ lệ tốc độ thay đổi so với giá trị kim ngạch xuất khẩu:

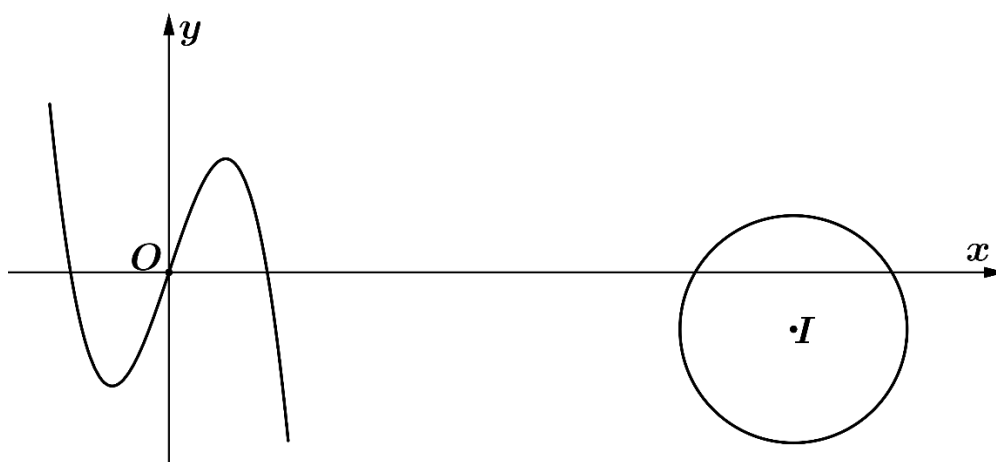
$$T(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{0,03x^2 - 0,08x + 0,25}{0,01x^3 - 0,04x^2 + 0,25x + 0,44} = \frac{3x^2 - 8x + 25}{x^3 - 4x^2 + 25x + 44}$$

$$T'(x) = \frac{(6x - 8)(x^3 - 4x^2 + 25x + 44) - (3x^2 - 8x + 25)(3x^2 - 8x + 25)}{(x^3 - 4x^2 + 25x + 44)^2}$$

Để $T(x)$ đạt giá trị lớn nhất đầu năm 2015 ứng với $x = 5 \Rightarrow$ điều kiện cần là $T'(5) = 0$

Mà $T'(5) = \frac{167}{9409} > 0 \Rightarrow$ Tỷ lệ tốc độ thay đổi so với giá trị kim ngạch xuất khẩu lớn nhất không xảy ra đầu năm 2015.

Câu 5: Trong một công viên toán học, ở một mặt của bờ hồ người ta xây dựng một đường đi có dạng là một phần của đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x)$ (C). Đồ thị (C) nằm trên mặt phẳng Oxy mà mỗi đơn vị trên mỗi trục Ox , Oy tương ứng với độ dài 10 mét. Biết (C) có một điểm cực trị có tọa độ $(1; 2)$ và có tâm đối xứng là gốc tọa độ O . Ở giữa hồ người ta xây dựng một khu vui chơi có dạng là hình tròn (H) có bán kính bằng 20 mét và có tọa độ tâm là $A(11; -1)$. Người ta thiết kế một cây cầu từ một điểm trên (C) đến (H) sao cho độ dài cây cầu là ngắn nhất. Biết chi phí làm mỗi mét theo chiều dài cây cầu là 100 triệu đồng.



- Hàm số $f(x) = -2x^3 + 4x$.
- Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số có phương trình $y = 2x$
- Đường biên của khu vui chơi hình tròn (H) có phương trình $(x - 11)^2 + (y + 1)^2 = 400$.
- Chi phí làm cây cầu trên là 7055 triệu đồng (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của triệu đồng)

Lời giải

- Sai: Gọi phương trình $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$



Vì (C) qua O nên $d = 0$, tâm đối xứng O nên điểm cực trị thứ hai là $(-1; -2)$

$$\text{Vì } (C) \text{ có điểm cực trị } (1; 2) \text{ và } (-1; -2) \text{ nên } \begin{cases} a + b + c = 2 \\ -a + b - c = -2 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -x^3 + 3x$$

b) Đúng: Dễ thấy đường thẳng qua 2 điểm cực trị $(1; 2), (-1; -2)$ là $y = 2x$

c) Sai: Vì mỗi đơn vị trên trục ứng với 10 mét độ dài nên đường tròn là biên của (H) có phương trình $(x - 11)^2 + (y + 1)^2 = 4$ (T)

d) Đúng: Gọi điểm chân cầu trên (C) là $M(x; -x^3 + 3x)$ và điểm chân cầu trên (H) là N thì dễ thấy N là giao của AM với (T) nên ta có $MN = AM - 2$.

$$\text{Vì vậy } MN \text{ nhỏ nhất khi } AM \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow AM^2 = (x - 11)^2 + (-x^3 + 3x + 1)^2 = g(x)$$

Dùng đạo hàm hoặc casio hoặc dùng ý nghĩa tiếp tuyến ta dễ dàng thấy $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 82 khi $x = 2$

Từ đó chi phí làm cây cầu này là $(\sqrt{82} - 2) \cdot 10.100 \approx 7055$ triệu đồng.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Các nhà khoa học tính toán phương án tiếp cận sao hỏa cho tàu đổ bộ theo cách tiếp cận thẳng đứng và đốt cháy các tên lửa hãm ở độ cao 250 km so với bề mặt của Sao Hỏa. Trong khoảng 60 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao h của con tàu so với bề mặt Sao Hỏa được tính (gần đúng) bởi hàm $h(t) = -0,02t^3 + 2t^2 - 40t + 250$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và h là độ cao tính bằng kilômét. Biết vận tốc tức thời của con tàu giảm trên khoảng $(a; 60)$ với a là số thực dương nhỏ nhất. Tìm a (làm tròn đến hàng phần chục)

Trả lời:

3	3	,	3
---	---	---	---

Lời giải

Ta có: $v(t) = h'(t) = -0,06t^2 + 4t - 40$ và đạo hàm $v'(t) = -0,12t + 4$.

$$\text{Giải phương trình } v'(t) = 0 \Leftrightarrow -0,12t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{100}{3}.$$

Bảng xét dấu của $v'(t)$ là

t	0	$\frac{100}{3}$	60
$v'(t)$	+	0	-

Ta thấy hàm số $v(t)$ nghịch biến trên $\left(\frac{100}{3}; 60\right)$ nên vận tốc tức thời của con tàu giảm trên khoảng $\left(\frac{100}{3}; 60\right)$ nên $a = \frac{100}{3} \approx 33,3$.



Câu 2: Xét chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox . Tọa độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = \frac{4}{3}t^3 - \frac{17}{2}t^2 + 13t + 1$ với $t \geq 0$. Khi đó vận tốc $v(t)$ của chất điểm tại thời điểm t là $x'(t)$. Biết vận tốc của chất điểm tăng trên khoảng $(a; +\infty)$ với a là số thực dương nhỏ nhất. Tìm a (làm tròn đến hàng phần trăm)

Trả lời:

2	,	1	3
---	---	---	---

Lời giải

Ta có: $v(t) = x'(t) = 4t^2 - 17t + 13$ có đạo hàm $v'(t) = 8t - 17$.

Giải phương trình đạo hàm $v'(t) = 0 \Leftrightarrow 8t - 17 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{17}{8}$.

Bảng xét dấu của $v'(t)$ là

t	0	2,125	$+\infty$
$v'(t)$	-	0	+

Ta thấy hàm số $v(t)$ đồng biến trên $\left(\frac{17}{8}; +\infty\right)$ nên vận tốc của chất điểm tăng trên khoảng

$\left(\frac{17}{8}; +\infty\right)$ nên $a = \frac{17}{8} \approx 2,13$.

Câu 3: Doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một loại sản phẩm mới trong một số năm nhất định được mô hình hóa bằng hàm số $f(t) = \frac{3000}{1+10e^{-t}}$, trong đó $t \geq 0$ là khoảng thời gian tính bằng năm kể từ khi phát hành sản phẩm đó. Đạo hàm $f'(t)$ biểu thị tốc độ bán hàng. Tốc độ bán hàng tăng liên tục trong khoảng bao nhiêu năm? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục)

Trả lời:

2	,	3	
---	---	---	--

Lời giải

$$\text{Tốc độ bán hàng } f'(t) = \frac{-3000(1+10e^{-t})'}{(1+10e^{-t})^2} = \frac{30000e^{-t}}{(1+10e^{-t})^2}.$$

$$\text{Xét hàm số } g(t) = \frac{30000e^{-t}}{(1+10e^{-t})^2} \text{ trên } [0; +\infty)$$

$$\text{Ta có } g'(t) = 30000 \cdot \frac{-e^{-t}(1+10e^{-t})^2 - e^{-t} \cdot 20(1+10e^{-t})(-e^{-t})}{(1+10e^{-t})^4} = \frac{-30000e^{-t}(1-10e^{-t})}{(1+10e^{-t})^3}$$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow 1 - 10e^{-t} = 0 \Leftrightarrow t = \ln 10$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(t)$



t	0	$\ln 10$	$+\infty$
$g'(t)$	+	0	-
$g(t)$			

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $g(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;\ln 10)$.

Vậy tốc độ bán hàng tăng liên tục trong khoảng $t = \ln 10 \approx 2,3$ năm.

Câu 4: Một chất điểm chuyển động trên trục Ox theo phương trình $x = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right)$, trong đó x là li độ của chất điểm tại thời điểm t giây. Trong 10 giây đầu tiên, ở thời điểm nào chất điểm bắt đầu chuyển động theo hướng dương của trục Ox ?

Trả lời:

4			
---	--	--	--

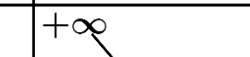
Lời giải

Chất điểm chuyển động theo hướng dương khi li độ x tăng hay hàm số $x = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right)$ đồng biến.

Xét hàm số $x = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right)$ trên $[0;10]$ có đạo hàm $x'(t) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right)$.

Xét phương trình $x'(t) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = 4k, (k \in \mathbb{Z})$.

Ta có: $0 \leq t \leq 10 \Leftrightarrow 0 \leq 4k \leq 10 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq \frac{5}{2}$. Do $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 0; k = 1; k = 2 \Rightarrow t \in \{0; 4; 8\}$

t	0	4	8	10	
$x'(t)$	−	0	+	0	−
$x(t)$					

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy chất điểm bắt đầu chuyển động theo chiều dương tại thời điểm $t = 4$ giây

Câu 5: Nhân dịp Ngày Phụ nữ Việt Nam 20 - 10, câu lạc bộ Mĩ thuật của Minh muốn tổ chức kinh doanh thiệp chúc mừng ngày 20-10 để gây quỹ sinh hoạt cho câu lạc bộ. Mỗi tấm thiệp mua về với giá 10 nghìn đồng. Các bạn trong câu lạc bộ sẽ sáng tác thêm nội dung của thiệp (vẽ thêm hình ảnh người, hoa cỏ, lời chúc...) và sau đó bán lại. Với mức giá bán 25 nghìn đồng cho một tấm thiệp, câu lạc bộ có thể bán được 600 chiếc. Nếu giảm giá bán 1 nghìn đồng mỗi tấm thiệp thì số lượng



hàng bán ra sẽ tăng thêm 50 chiếc. Vậy câu lạc bộ nên đặt giá bán bằng bao nhiêu nghìn đồng để gây quỹ được nhiều quỹ sinh hoạt nhất?

Trả lời:

2	3	,	5
---	---	---	---

Lời giải

Gọi x (nghìn đồng) là số tiền giảm giá cho mỗi tấm thiệp, $0 \leq x \leq 25$.

Số lượng tấm thiệp bán ra là $600 + 50x$ (chiếc).

Hàm chi phí cho $600 + 50x$ tấm thiệp là $(600 + 50x) \cdot 10$ (nghìn đồng).

Hàm doanh thu cho $600 + 50x$ tấm thiệp là $(600 + 50x)(25 - x)$ (nghìn đồng).

Khi đó lợi nhuận mà câu lạc bộ thu được là

$$P(x) = (600 + 50x)(25 - x) - (600 + 50x) \cdot 10 = (15 - x)(600 + 50x) = 9\,000 + 150x - 50x^2.$$

Bài toán trở thành, tìm giá trị của x với $0 \leq x \leq 25$ để $P(x) = -50x^2 + 150x + 9\,000$ đạt giá trị lớn nhất.

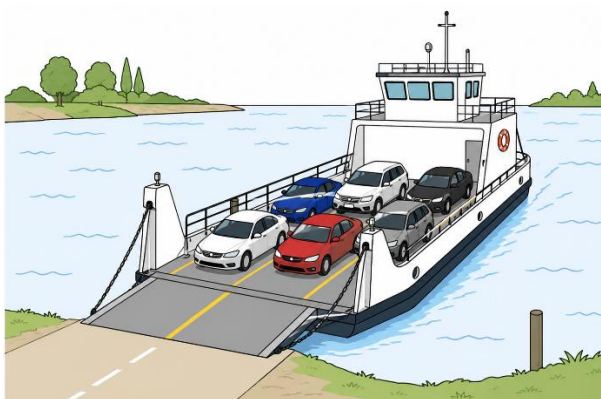
Ta có $P'(x) = -100x + 150 = 0$ khi $x = 1,5$.

Xét trên đoạn $[0; 25]$, ta có: $P(0) = 9\,000$; $P(1,5) = 9\,112,5$; $P(25) = -18\,500$.

Đối chiếu các kết quả vừa tính ta được $P(1,5) = 9\,112,5$ (nghìn đồng) là giá trị lớn nhất của hàm lợi nhuận. khi $0 \leq x \leq 25$.

Vậy câu lạc bộ nên đặt giá bán mới bằng 23,5 nghìn đồng thì sẽ gây được nhiều quỹ sinh hoạt nhất.

Câu 6: Một chiếc phà chạy giữa đất liền và một hòn đảo. Phà có công suất tối đa là 1000 xe hơi mỗi chuyến nhưng việc tải gần hết công suất rất tốn thời gian. Biết rằng số lượng xe hơi đưa lên phà mỗi chuyến là $f(t) = \frac{2000t}{2t+1}$ và mất một khoảng thời gian là t giờ. Mỗi xe cần trung bình 3,6 giây để di chuyển xuống khi đến điểm đích. Tổng thời gian di chuyển đến đảo và thời gian vòng về mất 1,28 giờ. Nên tải bao nhiêu xe lên phà cho mỗi chuyến đi để lượng xe trung bình di chuyển qua lại đảo mỗi giờ đạt lớn nhất? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Trả lời:

6	1	5	
---	---	---	--

Lời giải

Để đưa $f(t)$ xe lên phà thì cần t giờ nên tổng thời gian để đưa $f(t)$ xe qua đảo hoặc từ đảo về bằng: $t + \frac{3,6}{3600} f(t) + 1,28$ (giờ)



Số xe di chuyển trung bình mỗi giờ bằng: $g(t) = \frac{f(t)}{t + \frac{3,6}{3600}f(t) + 1,28} = \frac{\frac{2000t}{2t+1}}{t + \frac{3,6}{3600} \cdot \frac{2000t}{2t+1} + 1,28}$

Rút gọn biểu thức ta thu được $g(t) = \frac{2000}{2t + \frac{1,28}{t} + 5,56}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương $2t$ và $\frac{1,28}{t}$ ta được: $2t + \frac{1,28}{t} \geq 2\sqrt{2t \cdot \frac{1,28}{t}}$

Suy ra $g(t) = \frac{2000}{2t + \frac{1,28}{t} + 5,56} \leq \frac{2000}{2\sqrt{2t \cdot \frac{1,28}{t}} + 5,56} = \frac{50000}{219}$

Dấu bằng xảy ra khi $2t = \frac{1,28}{t} \Leftrightarrow 2t^2 = 1,28 \Leftrightarrow t^2 = 0,64 \Leftrightarrow t = 0,8$

Vậy để lượng xe trung bình di chuyển qua lại đảo mỗi giờ đạt lớn nhất cần tải lên phà mỗi chuyến là $f(0,8) \approx 615$ xe.

----- HẾT -----



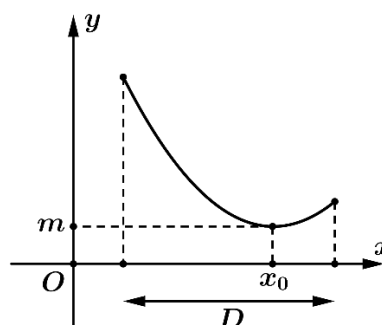
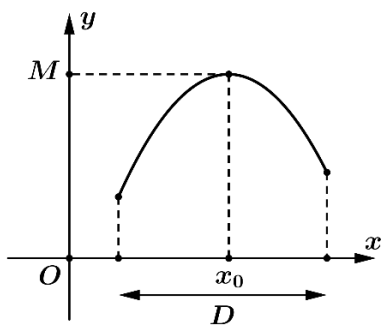
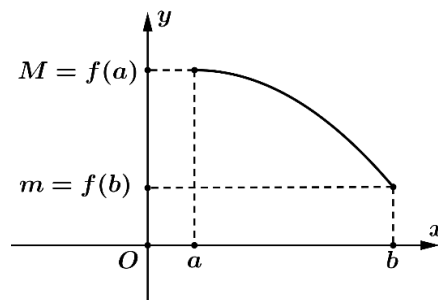
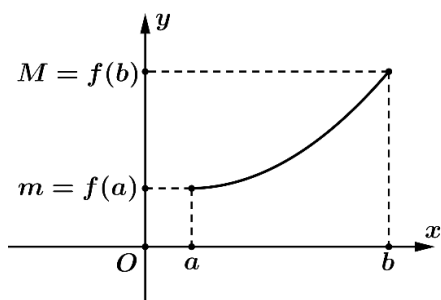
**BUỔI 04: MAX MIN CỦA HÀM SỐ**

Chuyên đề tính đơn điệu của hàm số gồm lý thuyết và ví dụ minh họa

Sưu tầm và biên soạn: Phan Nhật Linh

KẾT NỐI TRI THỨC

Tài liệu khóa học luyện thi THPT Quốc Gia theo chương trình mới

A // LÝ THUYẾT CẦN NHỚ**1. Định nghĩa**Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D .Số M được gọi là giá trị lớn nhất (GTLN) của hàm số $y = f(x)$ trên D , nếu $f(x) \leq M$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$. Kí hiệu: $M = \max_D f(x)$ Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hàm số $y = f(x)$ trên D , nếu $f(x) \geq m$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$. Kí hiệu: $m = \min_D f(x)$ **Chú ý:** Ta quy ước khi chỉ nói giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ (mà không cho rõ tập hợp D) thì ta hiểu đó là giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập xác định của nó.**Nhận xét:** Nếu biết đồ thị của hàm số trên tập hợp D , ta có thể xác định được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên D .**2. Định lý**Mọi hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.a) Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a; b]$ thì $\max_{[a; b]} f(x) = f(b)$ và $\min_{[a; b]} f(x) = f(a)$ b) Nếu hàm số $f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[a; b]$ thì $\max_{[a; b]} f(x) = f(a)$ và $\min_{[a; b]} f(x) = f(b)$

Quy tắc tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên một đoạn

Xét hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$

Bước 1: Tìm các điểm $x_1; x_2; \dots; x_n$ trên khoảng $(a; b)$, tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định (gọi là các điểm tới hạn)

Bước 2: Tính các giá trị $f(a); f(x_1); f(x_2); \dots; f(x_n); f(b)$

Bước 3: So sánh các giá trị vừa tính. Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m thì

$$\begin{cases} M = \max_{[a; b]} f(x) \\ m = \min_{[a; b]} f(x) \end{cases}$$
Quy tắc tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên một khoảng

Xét hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $(a; b)$

Bước 1: Tìm các điểm $x_1; x_2; \dots; x_n$ trên khoảng $(a; b)$, tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định (gọi là các điểm tới hạn)

Bước 2: Vẽ bảng biến thiên của hàm số trên $(a; b)$. Điền các điểm $x_1; x_2; \dots; x_n$ trên khoảng $(a; b)$ vào bảng biến thiên, xét dấu đạo hàm và vẽ bảng biến thiên

Bước 3: Dựa vào bảng biến thiên để kết luận về giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

B // VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Tìm giá trị lớn nhất của mỗi hàm số sau:

a) $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$

b) $f(x) = x - \frac{3}{x}$ trên nửa khoảng $(0; 3]$

Lời giải

a) $D = \mathbb{R}$. Ta có $f'(x) = \frac{-8x}{(1+x^2)^2}$.

Khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Bảng biến thiên của hàm số như sau:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	4	0

Căn cứ vào bảng biến thiên ta thấy $\max_{[-\infty; +\infty]} f(x) = 4$ tại $x = 0$.

b) Ta có: $f'(x) = 1 + \frac{3}{x^2}$. Khi đó trên nửa khoảng $(0; 3]$, $f'(x) > 0$.

Ngoài ra: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3) = 2$.

Bảng biến thiên của hàm số như sau:



x	1	3
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

Căn cứ vào bảng biến thiên ta thấy $\max f(x) = 2$ tại $x = 3$.

Câu 2: Tìm giá trị lớn nhất của mỗi hàm số sau:

a) $f(x) = x + \frac{4}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$

b) $f(x) = x^3 - 12x + 1$ trên khoảng $(1; +\infty)$

Lời giải

a) Ta có $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$. Khi đó trên khoảng $(0; +\infty)$, $f'(x) = 0$ khi $x = 2$.

Ngoài ra: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Bảng biến thiên của hàm số như sau:

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	4	$+\infty$

Căn cứ vào bảng biến thiên, ta thấy $\min f(x) = 4$ tại $x = 2$.

b) Ta có $f'(x) = 3x^2 - 12$. Khi đó trên khoảng $(1; +\infty)$, $f'(x) = 0$ khi $x = 2$.

Ngoài ra $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = -10$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Bảng biến thiên của hàm số như sau:

x	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	-10	-15	$+\infty$

Căn cứ vào bảng biến thiên ta thấy $\min_{(1; +\infty)} f(x) = -15$ tại $x = 2$.

Câu 3: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mỗi hàm số sau:



a) $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$ trên đoạn $[-1; 2]$

b) $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 1$ trên đoạn $[-1; 1]$

c) $f(x) = e^x(x^2 - 5x + 7)$ trên đoạn $[0; 3]$

d) $f(x) = \cos 2x + 2x + 1$ trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Lời giải

a) $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$ trên đoạn $[-1; 2]$

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in [-1; 2]$ hoặc $x = 1 \in [-1; 2]$

$$f(-1) = -\frac{5}{2}; f(0) = 0; f(1) = -\frac{1}{2}; f(2) = 2.$$

Vậy $\max_{[-1; 2]} f(x) = f(2) = 2$ và $\min_{[-1; 2]} f(x) = f(-1) = -\frac{5}{2}$.

b) $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 1$ trên đoạn $[-1; 1]$

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 6x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1; 1] \\ x = \frac{1}{2} \in [-1; 1]; \\ x = 1 \in [-1; 1] \end{cases}$

$$f(-1) = 5; f(0) = 1; f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{16}; f(1) = 1.$$

Vậy $\max_{[-1; 1]} f(x) = f(-1) = 5$ và $\min_{[-1; 1]} f(x) = f(0) = f(1) = 1$

c) $f(x) = e^x(x^2 - 5x + 7)$ trên đoạn $[0; 3]$

Ta có $f'(x) = e^x(x^2 - 5x + 7) + e^x(2x - 5) = e^x(x^2 - 3x + 2)$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [0; 3] \text{ hoặc } x = 2 \in [0; 3]$$

$$f(0) = 7; f(1) = 3e; f(2) = e; f(3) = e.$$

Vậy $\max_{[0; 3]} f(x) = f(1) = 3e$ và $\min_{[0; 3]} f(x) = f(2) = f(3) = e$

d) $f(x) = \cos 2x + 2x + 1$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Ta có $f'(x) = -2\sin 2x + 2$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2\sin 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Vì $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ nên $x = \frac{\pi}{4}$; $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$; $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + 1$; $f(\pi) = 2\pi + 2$



Vậy $\max_{\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]} f(x) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$ và $\min_{\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]} f(x) = f(\pi) = 2\pi + 2$

Câu 4: Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình :

$$s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5$$

Trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 5 giây đầu tiên đó?

Lời giải

Xét hàm số $s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5$ ($t > 0$),

Ta có $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 12t + 1$. Khi đó $v'(t) = -6t + 12$; $v'(t) = 0 \Leftrightarrow -6t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Bảng biến thiên của hàm số $v(t)$ như sau:

t	0	2	5
$v'(t)$	+	0	-
$v(t)$	1	13	-14

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $\max_{(0;5]} v(t) = v(2) = 13$.

Vậy vận tốc tức thời của chất điểm lớn nhất bằng 13 (m/s) tại $t = 2$ giây.

Câu 5: Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức

$$V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4, 0 \leq t \leq 0,5.$$

(Nguồn: R.I.Charles et al. Algebra, Pearson)

- Ban đầu trong bình xăng có bao nhiêu lít xăng?
- Sau khi bơm 30 giây thì bình xăng đầy. Hỏi dung tích của bình xăng trong xe là bao nhiêu lít?
- Khi xăng chảy vào bình xăng thì gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0 \leq t \leq 0,5$. Xăng chảy vào bình xăng ở thời điểm nào có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất?

Lời giải

a) Ta có: $V(0) = 4$ nên ban đầu trong bình xăng có 4 lít xăng.

b) Sau khi bơm 30 giây, tức 0,5 phút thì bình xăng đầy. Ta có $V(0,5) = 41,5$.

Vậy dung tích của bình xăng trong xe là 41,5 lít.

c) Ta có $V'(t) = 300(2t - 3t^2), t \in [0; 0,5]$ và ta có $V''(t) = 300(2 - 6t)$.



Khi đó trên khoảng $(0; 0,5)$, $V''(t) = 0$ khi $t = \frac{1}{3}$; $V'(0) = 0$; $V'(\frac{1}{3}) = 100$; $V'(0,5) = 75$.

Do đó: $\max_{[0; 0,5]} V'(t) = 100$ tại $t = \frac{1}{3}$.

Vậy xăng chảy vào bình ở thời điểm $t = \frac{1}{3}s$ kể từ khi bắt đầu bơm có tốc độ tăng.

Câu 6: Ho ép khí quản co lại, ảnh hưởng đến tốc độ của không khí vào khí quản. Tốc độ của không khí đi vào khí quản khi ho được cho bởi công thức

$$V = k(R - r)r^2 \text{ với } 0 \leq r < R,$$

Trong đó k là hằng số, R là bán kính bình thường của khí quản, r là bán kính khí quản khi ho (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014)

Hỏi bán kính của khí quản khi ho bằng bao nhiêu thì tốc độ của không khí đi vào khí quản là lớn nhất?

Lời giải

Xét hàm số $V(r) = k(R - r)r^2 = kRr^2 - kr^3$ với $0 \leq r < R$;

Ta có $V'(r) = 2kRr - 3kr^2$

$$V'(r) = 0 \Leftrightarrow 2kRr - 3kr^2 = 0 \Leftrightarrow kr(2R - 3r) = 0 \Leftrightarrow r = 0 \text{ (nhận) hoặc } r = \frac{2}{3}R \text{ (nhận)}$$

Bảng biến thiên của hàm số $V(r)$ như sau:

r	0	$\frac{2R}{3}$	R	
$V'(r)$		+	0	-
$V(r)$	0	$V(\frac{2R}{3})$	0	

Dựa vào bảng biến thiên trên, ta thấy hàm số $V(r)$ đạt giá trị lớn nhất tại $r = \frac{2}{3}R$.

Vậy khi $r = \frac{2}{3}R$ thì tốc độ của không khí đi vào khí quản là lớn nhất.

Câu 7: Một chất điểm chuyển động có vận tốc tức thời $v(t)$ phụ thuộc vào thời gian t theo hàm số $v(t) = -t^4 + 24t^2 + 500$ (m/s). Trong khoảng thời gian từ $t = 0$ (s) đến $t = 5$ (s) chất điểm đạt vận tốc lớn nhất tại thời điểm nào?

Lời giải

$$\text{Ta có } v'(t) = -4t^3 + 48t = -4t(t^2 - 12) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \pm 2\sqrt{3} \end{cases}$$

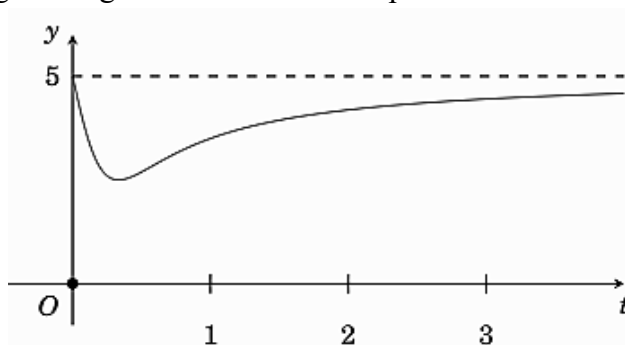
Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0; 5]$ ta có:

$$v(0) = 500; v(2\sqrt{3}) = 644; v(5) = 475$$

Vậy vận tốc lớn nhất khi $t = 2\sqrt{3} \approx 4$ giây.



Câu 8: Sự phân huỷ của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hoà tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau t giờ ($t \geq 0$) khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xấp xỉ bởi hàm số có đồ thị là đường cong $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$ như hình bên. Vào các thời điểm nào nồng độ oxygen trong nước cao nhất và thấp nhất?



Lời giải

Xét hàm số $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$ trên $[0; +\infty)$ có $y'(t) = \frac{135t^2 - 15}{(9t^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$

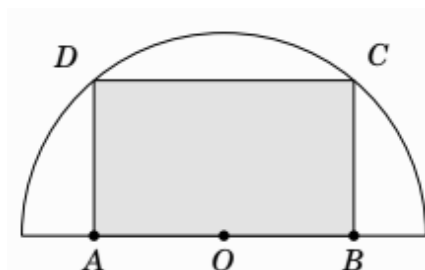
Mặt khác: $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[5 - \frac{15t}{9t^2 + 1} \right] = 5$ và $\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left[5 - \frac{15t}{9t^2 + 1} \right] = 5$

Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$		
$y'(t)$		–	0	+	
$y(t)$	5		2,5		5

Từ bảng biến thiên ta thấy $\min_{[0; +\infty)} y(t) = 2,5$ và $\max_{[0; +\infty)} y(t) = 5$

Câu 9: Tính diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của một hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính $R = 6$ cm nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp.



Lời giải

Gọi chiều dài $AD = 2x$ với $0 < x < 6 \Rightarrow AB = \sqrt{36 - x^2}$

Diện tích hình chữ nhật là $S = 2x \cdot \sqrt{36 - x^2}$ và xét hàm số $f(x) = 2x\sqrt{36 - x^2}$ trên $(0; 6)$

Ta có: $f'(x) = \sqrt{36 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{36 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3\sqrt{2}$

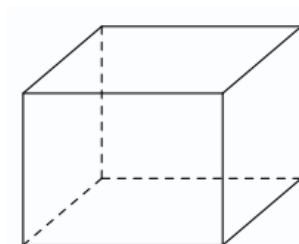
Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:



x	0	$3\sqrt{2}$	6		
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	36	$\searrow$	0

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích hình chữ nhật đạt được là 36cm^2 .

Câu 10: Một người muốn xây một cái bể chứa nước, dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 288dm^3 . Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/ m^2 . Nếu người đó biết xác định các kích thước của bể hợp lý thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi người đó trả chi phí thấp nhất để thuê nhân công xây dựng bể đó là bao nhiêu?



Lời giải

Gọi $x(x > 0)$ là chiều rộng của đáy bể. Khi đó chiều dài của đáy bể là $2x$ là chiều cao của bể là $\frac{0,144}{x^2}$. Khi đó diện tích cần xây là $2x^2 + \frac{0,864}{x}$

Xét hàm số $f(x) = 2x^2 + \frac{0,864}{x}$ có $f'(x) = 4x - \frac{0,864}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0,6$

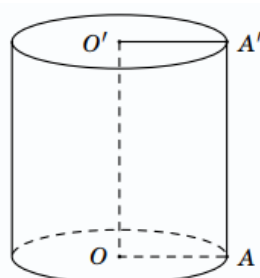
Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	0	0,6	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$2,16$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $\min f(x) = f(0,6) = 2,16$

Vậy chi phí thấp nhất để thuê nhân công xây bể là: $500000 \cdot 2,16 = 1080000$ đồng.

Câu 11: Một nhà sản xuất cần làm ra những chiếc bình có dạng hình trụ với dung tích 1000cm^3 . Mặt trên và mặt dưới của bình được làm bằng vật liệu có giá $1,2$ nghìn đồng/ cm^2 , trong khi mặt bên của bình được làm bằng vật liệu có giá $0,75$ nghìn đồng/ cm^2 . Tìm các kích thước của bình để chi phí vật liệu sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất.





Lời giải

Gọi bán kính của đáy bình là $x(\text{cm})$, $x > 0$ suy ra chiều cao là $\frac{100}{\pi \cdot x^2}(\text{cm})$

Chi phí để sản xuất một chiếc bình là: $T(x) = 2.1,2 \cdot \pi \cdot x^2 + 0,75 \cdot \frac{2000}{x} = 2,4\pi x^2 + \frac{1500}{x}$ nghìn

Để chi phí sản xuất mỗi chiếc bình là thấp nhất thì $T(x)$ là nhỏ nhất

Xét hàm số $T(x)$ có $T'(x) = 4,8\pi x - \frac{1500}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}}$ (thoả mãn)

Bảng biến thiên:

x	0	$\sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}}$	12
$T'(x)$	-	0	+
$T(x)$	$+\infty$	$T\left(\sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}}\right)$	$T(12)$

Để chi phí sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất thì bán kính đáy của bình là $\sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}}$ cm và chiều

cao của bình là $\frac{100}{\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}}\right)^2}(\text{cm})$

----- HẾT -----



ĐỀ RÈN LUYỆN 04: MAX MIN CỦA HÀM SỐ

Chuyên đề tính đơn điệu của hàm số gồm lý thuyết và ví dụ minh họa

Sưu tầm và biên soạn: Phan Nhật Linh

KẾT NỐI TRI THỨC

Tài liệu khóa học luyện thi THPT Quốc Gia theo chương trình mới

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Xét hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	-1	0	2	5	
y'	+	0	-	0	+
y	3	4	0	$+\infty$	

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** Hàm số đã cho đạt GTNN tại $x = -1$ và đạt GTLN tại $x = 5$ trên đoạn $[-1; 5]$.
B. Hàm số đã cho không tồn tại GTLN trên đoạn $[-1; 5]$.
C. Hàm số đã cho đạt GTNN tại $x = -1$ và $x = 2$ trên đoạn $[-1; 5]$.
D. Hàm số đã cho đạt GTLN tại $x = 0$ trên đoạn $[-1; 5]$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 5]$, ta thấy khi $x \rightarrow 5^-$, giá trị của $f(x)$ tiến ra $+\infty$. Vì hàm số tiến tới vô cùng lớn nên không tồn tại giá trị lớn nhất (GTLN) trên đoạn này

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	+		-
y	-1	2	1

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** GTLN của hàm số bằng 2. **B.** GTNN của hàm số bằng -1.
C. GTNN của hàm số bằng 1. **D.** GTNN của hàm số bằng -1 và 1.

Lời giải

Hàm số xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

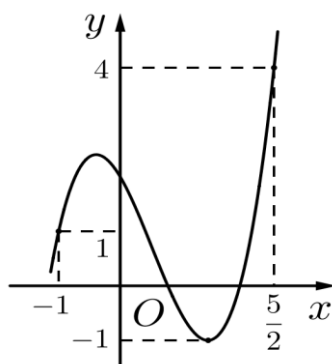
Từ bảng biến thiên, điểm cao nhất của đồ thị đạt được tại điểm có tọa độ $(0; 2)$.

Vì vậy GTLN của hàm số bằng 2.

Khi $x \rightarrow -\infty$ thì $y \rightarrow -1$ nhưng không bao giờ đạt được giá trị -1 nên hàm số không có giá trị nhỏ nhất.



Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$ là:



- A.** $M = 4, m = -1$. **B.** $M = 4, m = 1$. **C.** $M = \frac{5}{2}, m = 1$. **D.** $M = \frac{5}{2}, m = -1$.

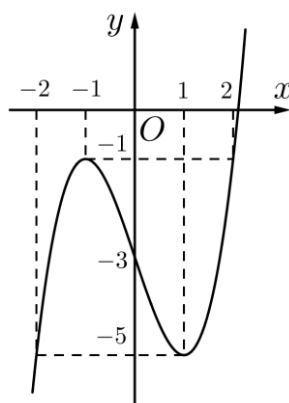
Lời giải

Xét đồ thị trên đoạn $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$:

Điểm cao nhất của đồ thị là tại đầu mút phải $x = \frac{5}{2}$ với tung độ tương ứng $y = 4 \Rightarrow M = 4$.

Điểm thấp nhất của đồ thị là điểm cực tiểu có tung độ tương ứng $y = -1 \Rightarrow m = -1$. Chọn **A**

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 2]$.



- A.** $m = -5, M = 0$. **B.** $m = -5, M = -1$. **C.** $m = -1, M = 0$. **D.** $m = -2, M = 2$.

Lời giải

Xét đồ thị hàm số trên đoạn $[-2; 2]$, ta xác định giá trị của hàm số tại các điểm biên và điểm cực trị:

Tại các biên: $f(-2) = -5$ và $f(2) = -1$

Tại các cực trị: Điểm cực đại $f(-1) = -1$, cực tiểu $f(1) = -5$.

So sánh các giá trị trên, ta được giá trị lớn nhất $M = -1$ và giá trị nhỏ nhất $m = -5$.

Câu 5: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $[0; 2]$ là:

- A.** $\min_{[0;2]} y = 0$. **B.** $\min_{[0;2]} y = 3$. **C.** $\min_{[0;2]} y = 5$. **D.** $\min_{[0;2]} y = 7$.

**Lời giải**

Hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ liên tục trên $[0; 2]$.

Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 3$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Vì xét trên $[0; 2]$ nên ta giữ lại nghiệm $x = 1$.

Tính giá trị tại các điểm: $y(0) = 5$, $y(1) = 3$, $y(2) = 7$.

Giá trị nhỏ nhất thu được là 3 tại $x = 1$

Câu 6: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên đoạn $[-4; 4]$ là:

- A.** $\min_{[-4; 4]} f(x) = -50$. **B.** $\min_{[-4; 4]} f(x) = 0$. **C.** $\min_{[-4; 4]} f(x) = -41$. **D.** $\min_{[-4; 4]} f(x) = 15$.

Lời giải

Hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ liên tục trên $[-4; 4]$

Đạo hàm: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$. Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x+1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$

Tính các giá trị: $f(-4) = -41$, $f(-1) = 40$, $f(3) = 8$, $f(4) = 15$.

Giá trị nhỏ nhất thu được là -41 tại $x = -4$

Câu 7: Gọi M , m lần lượt là GTLN, GTNN của hàm số $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$ trên đoạn $\left[-2; -\frac{1}{2}\right]$. Tính

$$P = M - m.$$

- A.** $P = -5$. **B.** $P = 1$. **C.** $P = 4$. **D.** $P = 5$.

Lời giải

Hàm số $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$ liên tục trên đoạn $\left[-2; -\frac{1}{2}\right]$.

Đạo hàm: $f'(x) = 6x^2 + 6x$. Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$

Tính các giá trị: $f(-2) = -5$, $f(-1) = 0$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

Suy ra GTLN $M = 0$ và GTNN $m = -5$. Do đó $P = M - m = 0 - (-5) = 5$

Câu 8: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0; 3]$ là:

- A.** $\min_{[0; 3]} y = -3$. **B.** $\min_{[0; 3]} y = \frac{1}{2}$. **C.** $\min_{[0; 3]} y = -1$. **D.** $\min_{[0; 3]} y = 1$.

Lời giải

Hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ liên tục trên đoạn $[0; 3]$

Đạo hàm: $y' = \frac{1 \cdot (x+1) - 1 \cdot (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in [0; 3]$.

Vì đạo hàm luôn dương nên hàm số đồng biến trên đoạn này.



Do đó GTNN đạt được tại đầu mút trái: $\min_{[0;3]} y = y(0) = \frac{0-1}{0+1} = -1$

Câu 9: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{5-4x}$ trên đoạn $[-1;1]$ là:

A. $\max_{[-1;1]} y = \sqrt{5}$ và $\min_{[-1;1]} y = 0$.

B. $\max_{[-1;1]} y = 1$ và $\min_{[-1;1]} y = -3$.

C. $\max_{[-1;1]} y = 3$ và $\min_{[-1;1]} y = 1$.

D. $\max_{[-1;1]} y = 0$ và $\min_{[-1;1]} y = -\sqrt{5}$.

Lời giải

Hàm số $y = \sqrt{5-4x}$ trên đoạn $[-1;1]$:

Đạo hàm: $y' = \frac{-4}{2\sqrt{5-4x}} = \frac{-2}{\sqrt{5-4x}} < 0, \forall x \in [-1;1]$.

Do hàm số nghịch biến liên tục nên:

$\max_{[-1;1]} y = y(-1) = \sqrt{5-4(-1)} = 3; \min_{[-1;1]} y = y(1) = \sqrt{5-4 \cdot 1} = 1$.

Câu 10: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x^2 + x - 2}{2-x}$ trên đoạn $[-2;1]$ lần lượt là:

A. 2 và 0.

B. 1 và -2.

C. 0 và -2.

D. 1 và -1.

Lời giải

Hàm số $y = \frac{2x^2 + x - 2}{2-x}$ liên tục trên $[-2;1]$

Đạo hàm: $y' = \frac{(4x+1)(2-x) - (2x^2 + x - 2)(-1)}{(2-x)^2} = \frac{-2x^2 + 8x}{(2-x)^2}$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$

Tính giá trị: $y(-2) = 1, y(0) = -1, y(1) = 1$ nên GTLN bằng 1 và GTNN bằng -1

Câu 11: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ trên đoạn $[-2;4]$. Tính tổng $M + m$.

A. -18.

B. -2.

C. 14.

D. -22.

Lời giải

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ liên tục trên đoạn $[-2;4]$

Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6x$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Tính giá trị: $y(-2) = -19, y(0) = 1, y(2) = -3, y(4) = 17$.

Suy ra $M = 17, m = -19 \Rightarrow M + m = 17 + (-19) = -2$

Câu 12: Cho hàm số $y = x + \sqrt{12-3x^2}$. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng:

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Điều kiện xác định: $12-3x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [-2;2]$.



Đạo hàm: $y' = 1 - \frac{3x}{\sqrt{12-3x^2}}$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{12-3x^2} = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 12-3x^2 = 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Tính các giá trị: $y(-2) = -2$, $y(2) = 2$, $y(1) = 1 + \sqrt{9} = 4$.

Vậy giá trị lớn nhất là 4

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = x^4 - \frac{2}{3}x^3 - x^2$

a) Hàm số đã cho có 3 điểm cực trị

b) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;1)$

c) $\max_{(-1;1)} y = f(-1) = \frac{2}{3}$

d) Hàm số luôn có giá trị nhỏ nhất trên mọi khoảng mà nó xác định

Lời giải

Đạo hàm: $y' = 4x^3 - 2x^2 - 2x$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-
y	$+\infty$	$-\frac{5}{48}$	0	$+\infty$	$+\infty$

a) Đúng: Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số có 3 điểm cực trị

b) Đúng: Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$

c) Sai: Xét trên khoảng $(-1;1)$, từ bảng biến thiên trên khoảng $(-1;1)$ ta có các nghiệm:

Với $x = -\frac{1}{2}$, giá trị $y\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{48}$

Với $x = 0$, giá trị $y(0) = 0$

Vậy giá trị lớn nhất trên khoảng $(-1;1)$ là $\max_{(-1;1)} y = 0$

d) Sai

Câu 2: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$

a) Cực đại của hàm số đã cho bằng -1

b) Trên khoảng $(0;2025)$, hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 8

c) $\max_{[-4;-3]} y = \min_{[3;4]} y$

d) Trên đoạn $[a;b]$ tùy ý với $b \leq 0$, hàm số luôn có giá trị lớn nhất không vượt quá 40

**Lời giải**

Đạo hàm: $y = 3x^2 - 6x - 9$. Cho $y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 40 \\ x = 3 \Rightarrow y = 8 \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	40		8	$+\infty$

a) Sai: Từ bảng biến thiên, ta thấy cực đại của hàm số là $y_{CD} = 40$, tại $x = -1$

b) Đúng: Trên khoảng $(0; 2025)$, $y' = 0$ chỉ có một nghiệm duy nhất là $x = 3$

Do đó, giá trị cực tiểu cũng chính là giá trị nhỏ nhất trên toàn bộ khoảng này: $\min_{(0; 2025)} y = y(3) = 8$

c) Đúng: Xét đoạn $[-4; -3]$

Với $x = -4 \Rightarrow y(-4) = -41$; với $x = -3 \Rightarrow y(-3) = 8$. Suy ra $\max_{[-4; -3]} y = y(-3) = 8$

Xét đoạn $[3; 4]$

Với $x = 3 \Rightarrow y(3) = 8$; với $x = 4 \Rightarrow y(4) = 15$. Suy ra $\min_{[3; 4]} y = y(3) = 8$

Vậy $\max_{[-4; -3]} y = \min_{[3; 4]} y = 8$

d) Đúng: Điều kiện $b \leq 0$ có nghĩa là đoạn $[a; b]$ nằm hoàn toàn ở phía bên trái trục tung, tức là tập con của nửa khoảng $(-\infty; 0]$.

Quan sát bảng biến thiên trên miền $(-\infty; 0]$, hàm số đạt đỉnh cao nhất tại $x = -1$ với $y(-1) = 40$

Vì vậy, nếu lấy một đoạn $[a; b]$ bất kỳ nằm trọn trong miền này, đỉnh cao nhất mà hàm số có thể vươn tới trên đoạn đó sẽ không bao giờ vượt qua con số 40, tức là $\max_{[a; b]} y \leq 40$

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$.

a) Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$

b) Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị

c) Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$ là -3

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng $(0; +\infty)$ là 1

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Đạo hàm: $y' = \frac{(2x-3)(x-1) - (x^2-3x+3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$. Cho $x^2-2x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=-3 \\ x=2 \Rightarrow y=1 \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên:



x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-3	1	1	$+\infty$	

a) Sai: Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$

b) Đúng: Từ bảng biến thiên, ta thấy trên khoảng $(0; 2)$ hàm số đồng biến

c) Đúng: Trên đoạn $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$, $y' = 0$ tại $x = 0$

$$\text{Tại } x = -2 \Rightarrow y(-2) = \frac{(-2)^2 - 3(-2) + 3}{-2 - 1} = -\frac{13}{3}$$

$$\text{Tại } x = 0 \Rightarrow y(0) = -3$$

$$\text{Tại } x = \frac{1}{2} \Rightarrow y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right) + 3}{\frac{1}{2} - 1} = -\frac{7}{2}$$

$$\text{Vậy } \max_{\left[-2; \frac{1}{2}\right]} y = y(0) = -3$$

d) Sai: Trên khoảng $(0; +\infty)$, hàm số không liên tục (bị gián đoạn tại $x = 1$)

Câu 4: Cho hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2}$

a) Tập xác định $D = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$

b) Trên khoảng $(0; 2)$, đạo hàm của hàm số đã cho luôn dương

c) Hàm số đã cho có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất lần lượt là $2\sqrt{2}$ và -2

d) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ âm

Lời giải

TXĐ: $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$. Vậy tập xác định của hàm số là $D = [-2; 2]$

$$\text{Đạo hàm: } y' = 1 + \frac{(4 - x^2)'}{2\sqrt{4 - x^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{\sqrt{4 - x^2} - x}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} - x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \Rightarrow y = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Tại } x = -2 \Rightarrow y = -2; x = 2 \Rightarrow y = 2$$

Ta có bảng biến thiên:

x	-2	$\sqrt{2}$	2
y'	$+$	0	$-$
y			



- a) Sai: Tập xác định của hàm số là $D = [-2; 2]$
- b) Sai: Từ bảng biến thiên ta thấy, hàm số đồng biến trên khoảng $(0; \sqrt{2})$ và nghịch biến trên khoảng $(\sqrt{2}; 2)$. Do đó đạo hàm không luôn dương trên khoảng $(0; 2)$
- c) Đúng: Hàm số liên tục trên đoạn $[-2; 2]$. Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{2}$ tại $x = \sqrt{2}$ và đạt giá trị nhỏ nhất bằng -2 tại $x = -2$
- d) Đúng: Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành:

$$x + \sqrt{4 - x^2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = -x \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 0 \\ 4 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$$

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ âm $x = -\sqrt{2}$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $[1; e^3]$.

Trả lời:

0	,	5	4
---	---	---	---

Lời giải

TXĐ: $D = [1; e^3]$

Đạo hàm: $y' = \frac{(\ln^2 x)' \cdot x - \ln^2 x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{\left(2 \ln x \cdot \frac{1}{x}\right) \cdot x - \ln^2 x}{x^2} = \frac{2 \ln x - \ln^2 x}{x^2} = \frac{\ln x (2 - \ln x)}{x^2}$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \ln x (2 - \ln x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \\ \ln x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = e^2 \end{cases}$

Tại $x = 1 \Rightarrow y(1) = 0$

Tại $x = e^2 \Rightarrow y(e^2) = \frac{4}{e^2} \approx 0,5413$ và tại $x = e^3 \Rightarrow y(e^3) = \frac{9}{e^3} \approx 0,448$

Vậy $M = \max_{[1; e^3]} y = y(e^2) = \frac{4}{e^2} \approx 0,54$

Câu 2: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3\sqrt{x-1} + 4\sqrt{5-x}$. Tính $M + m$.

Trả lời:

1	6		
---	---	--	--

Lời giải

TXĐ: $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5$. Vậy hàm số xác định và liên tục trên đoạn $D = [1; 5]$

Đạo hàm: $y' = \frac{3}{2\sqrt{x-1}} - \frac{4}{2\sqrt{5-x}} = \frac{3\sqrt{5-x} - 4\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}\sqrt{5-x}}$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{5-x} - 4\sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 2,44$

Tại $x = 1 \Rightarrow y(1) = 3\sqrt{1-1} + 4\sqrt{5-1} = 8$

Tại $x = 5 \Rightarrow y(5) = 3\sqrt{5-1} + 4\sqrt{5-5} = 6$



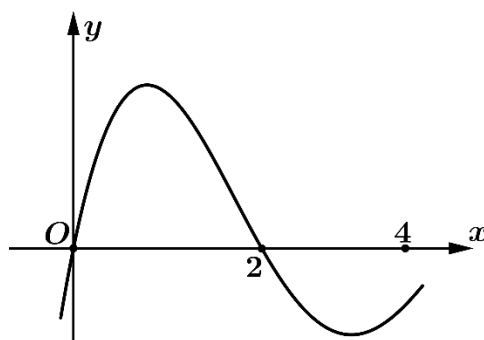
$$\text{Tại } x = \frac{61}{25} \Rightarrow y\left(\frac{61}{25}\right) = 3\sqrt{\frac{61}{25}-1} + 4\sqrt{5-\frac{61}{25}} = 10$$

$$\text{Giá trị lớn nhất: } M = \max_{[1;5]} y = y\left(\frac{61}{25}\right) = 10$$

$$\text{Giá trị nhỏ nhất: } m = \min_{[1;5]} y = y(5) = 6$$

$$\text{Vậy tổng } M + m = 10 + 6 = \boxed{16}$$

Câu 3: Cho hàm số có $f(x)$ có đạo hàm là hàm $f'(x)$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0) - f(2) = f(4) - f(3)$. Giả sử giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$ đạt được lần lượt tại x_0 và x_1 . Tính giá trị biểu thức $T = x_0 + x_1$



Trả lời:

6

Lời giải

Dựa vào đồ thị của hàm $f'(x)$ ta có bảng biến thiên :

x	0	2	4
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$f(0)$	$f(2)$	$f(4)$

Vậy giá trị lớn nhất $M = f(2) \Rightarrow x_1 = 2$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; 4)$ nên $f(2) > f(3) \Rightarrow f(2) - f(3) > 0$.

Theo giả thiết: $f(0) - f(2) = f(4) - f(3) \Leftrightarrow f(0) - f(4) = f(2) - f(3) > 0 \Rightarrow f(0) > f(4)$

Suy ra giá trị nhỏ nhất $m = f(4) \Rightarrow x_0 = 4$.

Vậy $x_0 = 4; x_1 = 2$, ta có $x_0 + x_1 = 6$

Câu 4: Biết giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2\cos^3 x - \cos 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ là $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}$

và $\frac{a}{b}$ tối giản. Khi đó tích $P = a.b$ bằng bao nhiêu?

**Trả lời:**

5	1	3	
---	---	---	--

Lời giải

Sử dụng công thức nhân đôi cho hàm số cosin: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

Ta được hàm số mới: $f(x) = 2\cos^3 x - (2\cos^2 x - 1) = 2\cos^3 x - 2\cos^2 x + 1$ (*)

Đặt $t = \cos x$ ($t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$). Từ phương trình (*) ta có hàm số mới: $g(t) = 2t^3 - 2t^2 + 1$

Đạo hàm $g'(t) = 6t^2 - 4t$. Cho $g'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \text{ (loại)} \\ t = \frac{2}{3} \text{ (nhận)} \end{cases}$

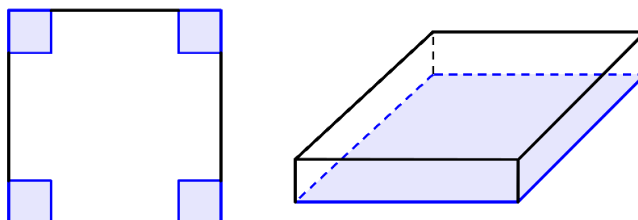
$$\text{Tại } t = \frac{1}{2} \Rightarrow g\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{3}{4}$$

$$\text{Tại } t = 1 \Rightarrow g(1) = 2 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 1$$

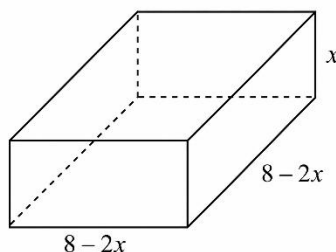
$$\text{Tại } t = \frac{2}{3} \Rightarrow g\left(\frac{2}{3}\right) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1 = \frac{19}{27}$$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\min_{\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]} f(x) = \frac{19}{27} \Rightarrow \begin{cases} a = 19 \\ b = 27 \end{cases} \Rightarrow P = a.b = \boxed{513}$

Câu 5: Cho một tấm nhôm hình vuông có cạnh 8 dm. Anh Long cắt ở bốn góc bốn hình vuông có độ dài bằng x (dm) rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ để được một cái hộp có dạng khối hộp chữ nhật. Hỏi thể tích lớn nhất của cái hộp là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

**Trả lời:**

3	8		
---	---	--	--

Lời giải

Sau khi gấp lại, ta được khối hộp với các kích thước như hình vẽ. Chiều cao khối hộp là x dm.

Thể tích $V = x(8-2x)^2$ với điều kiện $8-2x > 0 \Leftrightarrow x < 4$

Xét hàm số $V(x) = x(8-2x)^2$ trên khoảng $(0; 4)$

$$V'(x) = (x)'(8-2x)^2 + x[(8-2x)^2]' = (8-2x)^2 + x[2 \cdot (-2)(8-2x)] = (8-2x)(8-6x)$$

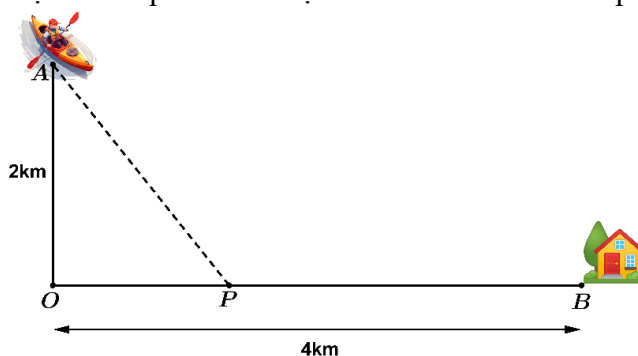
$$\text{Đạo hàm: } V'(x) = 0 \Leftrightarrow (8-2x)(8-6x) \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $V(x)$

x	0	$\frac{4}{3}$	4
$V'(x)$	+	0	-
$V(x)$	0	$\frac{1024}{27}$	0

Vậy thể tích lớn nhất của hộp là $\frac{1024}{27} = 37,9259... \approx 38 \text{ (dm}^3\text{)}$

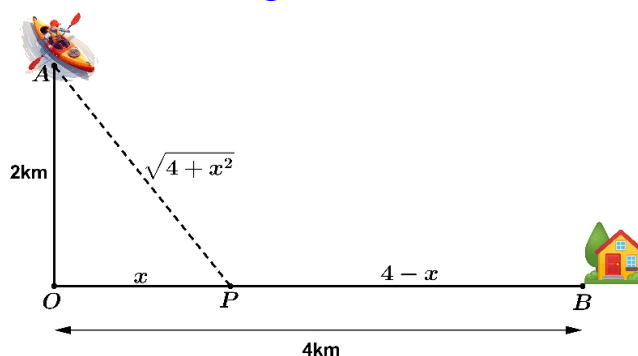
Câu 6: Anh An đang trên chiếc thuyền tại vị trí A cách bờ sông 2 (km), anh dự định chèo thuyền vào bờ và tiếp tục chạy bộ theo một đường thẳng để đến một địa điểm B tọa lạc ven bờ sông, điểm B cách vị trí O trên bờ gần với thuyền nhất là 4 (km) minh họa như hình vẽ. Biết rằng anh An chèo thuyền với vận tốc 6 (km/h) và chạy bộ trên bờ với vận tốc 10 (km/h). Khoảng thời gian ngắn nhất để anh An từ vị trí xuất phát đến được điểm B là bao nhiêu phút?



Trả lời:

4	0		
---	---	--	--

Lời giải



Đặt $OP = x$ ($0 < x < 4$) $\Rightarrow BP = 4 - x$ suy ra $AP = \sqrt{x^2 + 4}$

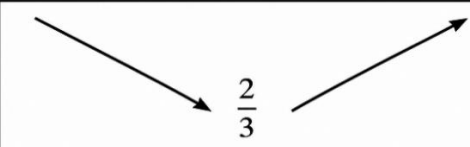
Khoảng thời gian để anh An từ vị trí xuất phát đến được điểm B là:

$$t(x) = t_{AP} + t_{PB} = \frac{\sqrt{4+x^2}}{6} + \frac{4-x}{10} \Rightarrow t'(x) = \frac{x}{6\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{10}$$

$$\text{Giải phương trình } t'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{6\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{10} = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{4+x^2} = 5x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 4 \\ 4x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$



Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{3}{2}$	4
$t'(x)$	—	0	+
$t(x)$			

Thời gian ngắn nhất để anh An từ vị trí xuất phát đến được điểm B là: $t_{\min} = \frac{2}{3}.60 = 40$ (phút)

----- HẾT -----



**BUỔI 05: ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ**

Chuyên đề tính đơn điệu của hàm số gồm lý thuyết và ví dụ minh họa

Sưu tầm và biên soạn: Phan Nhật Linh

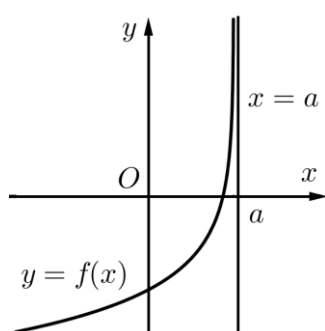
KẾT NỐI TRI THỨC

Tài liệu khóa học luyện thi THPT Quốc Gia theo chương trình mới

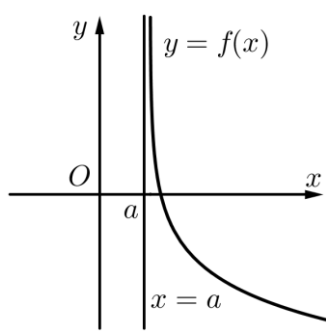
A // LÝ THUYẾT CẦN NHỚ**1. Đường tiệm cận đứng****Định nghĩa:**

Đường thẳng $x = a$ được gọi là một đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thỏa mãn:

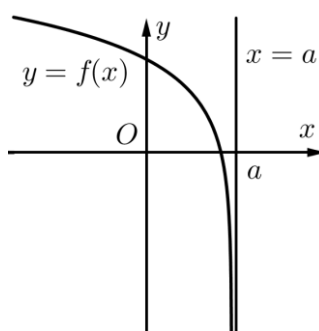
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty.$$



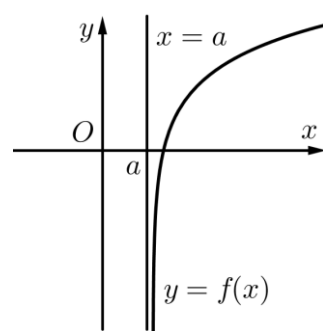
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

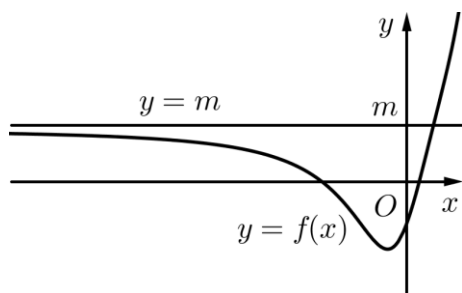


$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

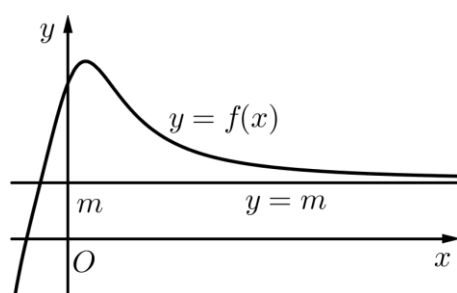
Chú ý: Đồ thị hàm số có thể không có tiệm cận đứng, có thể có một tiệm cận đứng, có thể có nhiều tiệm cận đứng hoặc có thể có vô số tiệm cận đứng.

2. Đường tiệm cận ngang**Định nghĩa:**

Đường thẳng $y = m$ được gọi là một đường tiệm cận ngang (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m$.



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m$$

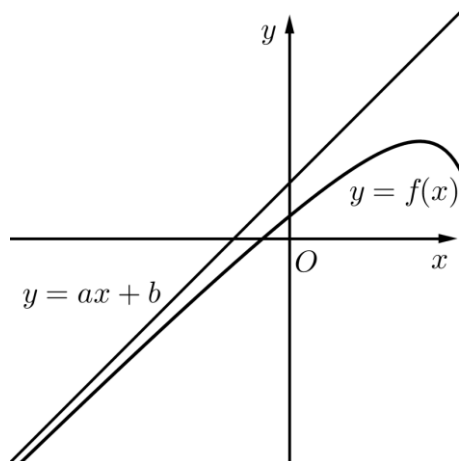


Chú ý: Đồ thị hàm số hoặc không có tiệm cận ngang, hoặc có một tiệm cận ngang hoặc có tối đa hai tiệm cận ngang

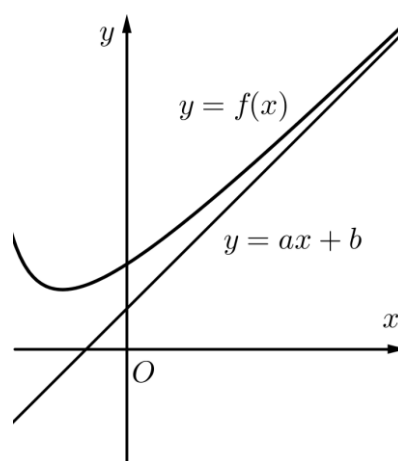
3. Đường tiệm cận xiên

Định nghĩa:

Đường thẳng $y = ax + b$, $a \neq 0$, được gọi là đường tiệm cận xiên (hay tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

Nhận xét:

a) Trong trường hợp tổng quát, có thể tìm các hệ số a, b trong phương trình của đường tiệm cận xiên $y = ax + b$ theo công thức như sau:

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] \text{ hoặc } a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$$

b) Khi $a = 0$ thì đồ thị của hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = b$.

Nhận xét:

- Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận xiên thì tập xác định của hàm số phải chứa khoảng vô cực
- Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số có thể không có, có một hoặc nhiều điểm chung với đồ thị hàm số
- Một đồ thị chỉ có tối đa hai đường tiệm cận xiên (tức là có thể không có, có một hoặc hai TCX)

Tiệm cận của đồ thị hàm số phân thức bậc nhất/ bậc nhất $y = \frac{ax + b}{cx + d}$

Cho hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ có $c \neq 0$ và $ad - bc \neq 0$ có đồ thị là (C)

Khi đó, đồ thị hàm số (C) có tiệm cận đứng: $x = -\frac{d}{c}$, tiệm cận ngang: $y = \frac{a}{c}$ và không có tiệm cận xiên.

Tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a \neq 0$; $m \neq 0$, đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu)



Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng: $x = -\frac{n}{m}$, tiệm cận xiên: $y = \frac{a}{m}x - \frac{an-bm}{m^2}$ và không có tiệm cận ngang.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Hãy tìm đường tiệm cận đứng (TCD) của đồ thị các hàm số sau đây:

a) $y = \frac{2x-1}{x+1}$

b) $y = \frac{x^2-x-6}{x^2-4}$

c) $y = \frac{\sqrt{x-2} + \sqrt{9-x}}{\sqrt{x-1}}$

d) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

e) $y = \frac{\sqrt{2-x}}{x^2-4x+3}$

f) $y = \frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$

g) $y = \frac{\sqrt{x+15}-4}{x^2-x}$

h) $y = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$

Lời giải

a) Ta có: $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{2x-1}{x+1} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{2x-1}{x+1} = -\infty$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng $x = -1$.

b) $y = \frac{x^2-x-6}{x^2-4} = \frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x-3}{x-2}$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow (2)^+} y = \lim_{x \rightarrow (2)^+} \frac{x-3}{x-2} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (2)^-} y = \lim_{x \rightarrow (2)^-} \frac{x-3}{x-2} = +\infty$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng $x = 2$.

c) Tập xác định: $D = [2; 9]$ nên hàm số không có đường tiệm cận đứng

d) Hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ có tập xác định $D = (0; +\infty)$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ nên đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận đứng là $x = 0$.

e) Tập xác định $D = (-\infty; 2] \setminus \{1\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ vậy đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 1$.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

f) Điều kiện: $x \neq 0$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x} = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x} = \frac{1}{2}$.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$ không có tiệm cận đứng.



g) Tập xác định: $D = [-15; +\infty) \setminus \{0; 1\}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x+15}-4}{x^2-x} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+15}-4}{x^2-x} = +\infty$

Vậy $x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+15}-4}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+15-16}{x(x-1)(\sqrt{x+15}+4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x(\sqrt{x+15}+4)} = \frac{1}{8}$$

Vậy $x=1$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có một đường tiệm cận đứng.

h) Điều kiện: $\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ x^2+x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \neq -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$.

Tập xác định: $D = [-4; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \left(\frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} \right) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left(\frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} \right) = +\infty$.

Vậy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$.

Câu 2: Hãy tìm đường tiệm cận ngang (TCN) của đồ thị các hàm số sau đây:

a) $y = \frac{3x+2}{x-2}$

b) $y = \frac{x-1}{x^2+5x-6}$

c) $y = \frac{4x^2-4x-8}{(x-2)(x+1)^2}$

d) $y = \frac{x^3-9x}{x^3-x^2-5x-3}$

e) $y = \frac{-x^2+x+2}{(x+1)(x+2)}$

f) $y = \frac{\sqrt{x-1}+1}{5x^2-3x-2}$

g) $y = \frac{1-2x-\sqrt{x+10}}{x^2-2x-3}$

h) $y = \frac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2}$

Lời giải

a) Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x+2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}} = 3$.

Vậy tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng $y=3$.

b) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-6; 1\}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2+5x-6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{5}{x} - \frac{6}{x^2}} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x^2+5x-6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{5}{x} - \frac{6}{x^2}} = 0$$

Suy ra đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số



c) Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^2 - 4x - 8}{(x-2)(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left(4 - \frac{4}{x} - \frac{8}{x^2} \right)}{x^3 \left(1 - \frac{2}{x} \right) \left(1 + \frac{1}{x} \right)^2} = 0$

Vậy đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 0$.

d) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$. Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$ nên đường thẳng $y = 1$ là TCN của đồ thị hàm số.

e) Xét hàm số $y = \frac{-x^2 + x + 2}{(x+1)(x+2)}$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; -2\}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + x + 2}{(x+1)(x+2)} = -1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + x + 2}{(x+1)(x+2)} = -1$.

Vậy $y = -1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

f) Tập xác định: $D = (1; +\infty)$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-1} + 1}{5x^2 - 3x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}} + \frac{1}{x^2}}{5 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}} = 0$ nên đồ thị hàm số đã cho chỉ có một

đường tiệm cận ngang là $y = 0$.

g) Tập xác định: $D = [-10; +\infty) \setminus \{-1; 3\}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 2x - \sqrt{x+10}}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} - \sqrt{\frac{1}{x^3} + \frac{10}{x^4}}}{1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} = 0$

Vậy $y = 0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

h) Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x(4x+6)} - 2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{6}{x}} - \frac{2}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = 2$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x(4x+6)} - 2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4 + \frac{6}{x}} - \frac{2}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = -2$.

Vậy đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang $y = \pm 2$.

Câu 3: Hãy tìm đường tiệm cận xiên (TCX) của các đồ thị hàm số sau:

a) $y = \frac{x^2 + 3x + 5}{x + 2}$

b) $y = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1}$



c) $y = x - 3 + \frac{1}{x^2}$

d) $y = x + \sqrt{x^2 - 1}$

e) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

f) $y = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Lời giảia) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

$$\text{Ta thấy } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x + 5}{x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = 1 \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+5}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{5}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = 1.$$

Vậy $y = x + 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm sốb) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = 2.$$

$$\text{Mặt khác: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1} - 2x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-x + 2}{x - 1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-1 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \right] = -1.$$

Vậy $y = 2x - 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.c) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\text{Ta thấy } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [y - (x - 3)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Vậy $y = x - 3$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.d) Tập xác định của hàm số đã cho là $D = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} [y - 2x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x + \sqrt{x^2 - 1} - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 1} - x] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = 0 \end{aligned}$$

Vậy đồ thị hàm số có một đường tiệm cận xiên là $y = 2x$.

e) Ta có $y = \sqrt{x^2 - 2x + 2} = \sqrt{(x-1)^2 + 1}$

$$\text{Do } \lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (-x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{(x-1)^2 + 1} - (-x + 1)]$$



$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)^2 + 1 - (-x+1)^2}{\sqrt{(x-1)^2 + 1} + (-x+1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x-1|\sqrt{1+\frac{1}{(x-1)^2}} + (-x+1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(1-x)\left[\sqrt{1+\frac{1}{(x-1)^2}} + 1\right]} = 0
\end{aligned}$$

Vậy $y = -x + 1$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

$$\begin{aligned}
\text{Do } \lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (x-1)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{(x-1)^2 + 1} - (x-1) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^2 + 1 - (x-1)^2}{\sqrt{(x-1)^2 + 1} + (x-1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{|x-1|\sqrt{1+\frac{1}{(x-1)^2}} + (x-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x-1)\left[\sqrt{1+\frac{1}{(x-1)^2}} + 1\right]} = 0
\end{aligned}$$

Vậy $y = x - 1$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

f) Tập xác định của hàm số đã cho là $D = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} - x \right] = 0.$$

Vậy đồ thị hàm số có một đường tiệm cận xiên là $y = x$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (-x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (y + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} + x \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{(-x) \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} + x \right] = 0
\end{aligned}$$

Vậy đồ thị hàm số có một đường tiệm cận xiên là $y = -x$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A.** Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
- B.** Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.
- C.** Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.
- D.** Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

Lời giải



Theo giả thiết ta có:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ suy ra đường $y = 1$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ suy ra đường $y = -1$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.

Câu 5: Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-7}{x+2}$ có tọa độ là

A. $(-2; 3)$.

B. $(3; -2)$.

C. $(-3; 2)$.

D. $(2; -3)$.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = \frac{3x-7}{x+2}$ có tiệm cận đứng $x = -2$ và tiệm cận ngang $y = 3$.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là giao điểm của 2 đường tiệm cận nên điểm $(-2; 3)$ là tâm đối xứng của đồ thị hàm số.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D và tồn tại các giới hạn hữu hạn là $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -a - 2$ trong đó a là số thực. Để đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đúng một đường tiệm cận ngang thì giá trị của a bằng:

A. $a = 1$.

B. $a = -1$.

C. $a = 0$.

D. Không tồn tại a .

Lời giải

Để đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đúng một đường tiệm cận ngang thì

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \Leftrightarrow a = -a - 2 \Leftrightarrow a = -1$$

Vậy giá trị của $a = -1$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-		+	-
$f(x)$	$-\infty$	2	4	6

Tổng số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4 \end{cases}$ nên đồ thị hàm số không có một tiệm cận đứng.



Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$				$+$
$f(x)$	0	$+\infty$		$-\infty$	0

Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số bằng

A. 3.

B. 4.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\lim_{x \rightarrow -2} y = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 2^+} y = -\infty$ suy ra đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x = -2$ và $x = 2$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$ suy ra đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là đường thẳng $y = 0$.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$		$+$	0	$-$
$f(x)$	1	2	3	3	

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta thấy $x = 0$ thì hàm số không xác định và $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, nên $x = 0$ là TCD của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 \Rightarrow y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 10: Cho $y = f(x)$ là hàm số bậc ba và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	0	-4	$+\infty$	



Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{2f(x)+3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2.

B. 6.

C. 3.

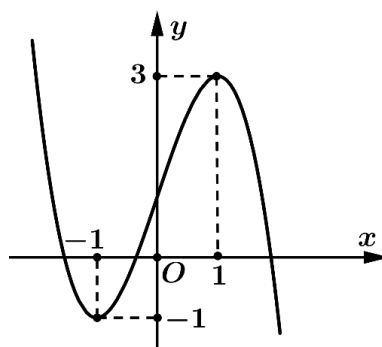
D. 4.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2f(x)+3} = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Lại có: $2f(x)+3=0 \Leftrightarrow f(x)=-\frac{3}{2}$ có ba nghiệm phân biệt, suy ra đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận đứng.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)-1}$ có mấy đường tiệm cận đứng?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Ta có đường thẳng $x = x_0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)-1}$ khi x_0 là nghiệm phương trình $f(x)-1=0 \Leftrightarrow f(x)=1$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy phương trình $f(x)=1$ có ba nghiệm phân biệt

Suy ra đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)-1}$ có 3 đường tiệm cận đứng.

Câu 12: Cho hàm số có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		+	-	+
$f(x)$	-4	$+\infty$	2	$-\infty$	-1

Tổng số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là



A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -4$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -1 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y = -1$ và $y = -4$.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$. Hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ 	$+\infty$ 	$+\infty$ 	$-\infty$ 	

Tính tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. $y = \frac{1}{2f(x)+6}$.

A. 6.

B. 5.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Đặt $g(x) = \frac{1}{2f(x)+6}$ thì ta có hàm số xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2; a\}$

Trong đó $f(a) = -3$ và $a \in (2; +\infty)$. Khi đó ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{1}{2 \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + 6} = 0$

Mặt khác: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{1}{2 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + 6} = \frac{1}{26}$ nên $y = 0$ và $y = \frac{1}{26}$ là hai đường tiệm cận ngang.

Mặt khác ta lại có: $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} g(x) = \frac{1}{2 \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) + 6} = +\infty \Rightarrow x = -2$ là tiệm cận đứng;

$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \frac{1}{2 \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + 6} = 0 \Rightarrow x = 2$ không là tiệm cận đứng;

$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \frac{1}{2 \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) + 6} = +\infty \Rightarrow x = a$ là tiệm cận đứng;

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)+6}$ có 4 đường tiệm cận.

Câu 14: Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(x) = \frac{50x}{x+4}$ ($x \geq 0$) bộ phận mỗi ngày sau x ngày đào tạo. Xem $y = N(x)$ là một hàm số xác định trên $[0; +\infty)$, khi đó tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

A. $y = \frac{25}{2}$.B. $x = \frac{25}{2}$.C. $x = 50$.D. $y = 50$.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} N(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{50x}{x+4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{50x}{x\left(1+\frac{4}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{50}{1+\frac{4}{x}} = 50.$

Câu 15: Người ta ngọt hóa nước hồ bằng cách bơm nước ngọt vào hồ và biểu thức $C(t) = \frac{4000}{400+3t}$ (gam/lít) biểu thị nồng độ muối trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm. Khi thời gian đủ lớn nồng độ muối trong bể bằng

- A. 1. B. $\frac{400}{3}.$ C. 3. D. 0.

Lời giải

Ta có $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{4000}{400+3t} = 0$

Câu 16: Chi phí (nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số $F(x) = 60000 + 250x$. Gọi $\bar{F}(x)$ là hàm số biểu thị chi phí trung bình (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm ($x \geq 0$), khi đó tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là:

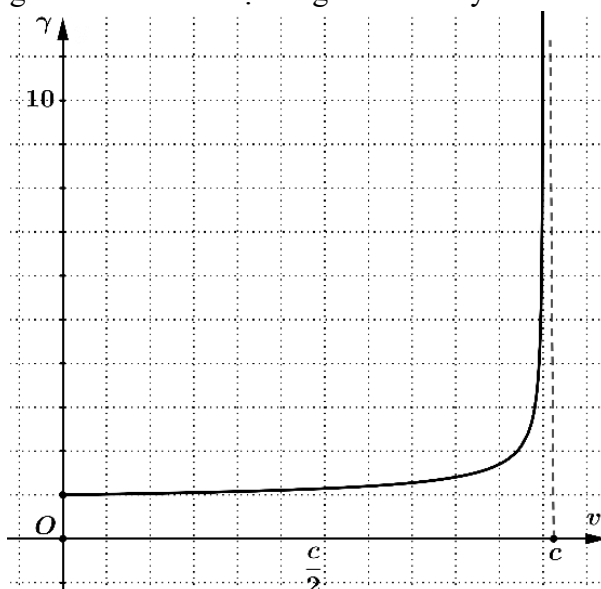
- A. $x = 250.$ B. $y = \frac{1}{240}.$ C. $y = 240.$ D. $y = 250.$

Lời giải

Chi phí trung bình để sản xuất x sản phẩm là $\bar{F}(x) = \frac{60000+250x}{x}$ (nghìn đồng).

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{F}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{60000+250x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{60000}{x} + 250 \right) = 250.$

Câu 17: Một ứng dụng của hàm số trong vật lý là hệ số tương đối tính Lorentz được cho bởi công thức $\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, với v là vận tốc tương đối giữa các hệ quy chiếu quán tính, c là tốc độ ánh sáng trong chân không. Hàm này được sử dụng trong thuyết tương đối đặc biệt của Einstein để mô tả các hiệu ứng tương đối tính có đồ thị trông như thế này:





Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là:

A. $x = 0$.

B. $y = 0$.

C. $x = c$.

D. $x = \frac{c}{2}$.

Lời giải

Ta có: $\lim_{v \rightarrow c} \gamma(v) = \lim_{v \rightarrow c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = +\infty$ nên $x = c$ là tiệm cận đứng của đồ thị.

Câu 18: Một bể chứa 1000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 15 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Biết rằng nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là một hàm số $f(t)$, thời gian t tính bằng phút. Phương trình tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ bằng

Lời giải

Sau t phút, ta có khối lượng muối trong bể là $20.15t = 300t$ (gam).

Thể tích của lượng nước trong bể sau t phút là $1000 + 20t$ (lít).

Vậy nồng độ muối sau t phút là $f(t) = \frac{300t}{1000 + 20t} = \frac{30t}{100 + 2t}$ (gam/lít)

Do $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{100 + 2t} = 15$ nên đồ thị hàm số $y = f(t)$ có phương trình tiệm cận ngang là $y = 15$.

Câu 19: Một bể chứa 2 m^3 nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ không đổi với tốc độ 20 lít/phút. Biết rằng nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là một hàm số $f(t)$, thời gian t tính bằng phút. Biết rằng tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ là $y = 10$. Nồng độ muối trong bể sau khi bơm được 1 giờ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Giả sử nước muối bơm vào có nồng độ a gam/lít.

Sau t phút, ta có khối lượng muối trong bể là $20at$ (gam).

Thể tích của lượng nước trong bể sau t phút là $2000 + 20t$ (lít).

Vậy nồng độ muối sau t phút là $f(t) = \frac{20at}{2000 + 20t} = \frac{at}{100 + t}$ (gam/lít)

$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{at}{100 + t} = a$ nên đồ thị hàm số $y = f(t)$ có phương trình tiệm cận ngang là $y = a = 10$.

Từ đó hàm số nồng độ muối trong bể sau khi bơm được t phút là $f(t) = \frac{10t}{100 + t}$.

Nồng độ muối sau 1 giờ bơm là $f(60) = \frac{10.60}{100 + 60} = 3,75$ gam/ lít.

----- **HẾT** -----

**ĐỀ RÈN LUYỆN 05: ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ**

Chuyên đề tính đơn điệu của hàm số gồm lý thuyết và ví dụ minh họa

Sưu tầm và biên soạn: Phan Nhật Linh

KẾT NỐI TRI THỨC

Tài liệu khóa học luyện thi THPT Quốc Gia theo chương trình mới

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{x-1}$ có phương trình:

A. $y = \frac{1}{3}$.

B. $y = 3$.

C. $y = -1$.

D. $y = 1$.

Lời giải

Ta có : $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{x-1} = 3$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+1}{x-1} = 3$ nên $y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 2: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-2}{x+1}$ là đường thẳng nào sau đây

A. $x = -2$.

B. $x = 1$.

C. $x = -1$.

D. $x = 2$.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x-2}{x+1} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -1^-} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x-2}{x+1} = +\infty$ nên đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$.

B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.

Lời giải

Dựa vào định nghĩa đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	2	$+\infty$	5

Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

**A.** 3**B.** 2**C.** 4**D.** 1**Lời giải**

Từ bảng biến thiên ta có:

$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 5$ nên đường thẳng $y = 2$ và $y = 5$ là các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là 3

Câu 5: Hàm số nào sau đây có một tiệm cận:

A. $y = \frac{x+3}{2x-1}$

B. $y = \frac{x^2+3x-2}{x+3}$

C. $y = \frac{4}{x-1}$

D. $y = \frac{2x}{x^2+1}$

Lời giải

Hàm số $y = \frac{x+3}{2x-1}$ có một tiệm cận đứng $x = \frac{1}{2}$ và một tiệm cận ngang $y = \frac{1}{2}$

Hàm số $y = \frac{x^2+3x-2}{x+3} = x - \frac{2}{x+3}$ có một tiệm cận đứng $x = -3$ và một tiệm cận xiên $y = x$.

Hàm số $y = \frac{4}{x-1}$ có một tiệm cận đứng $x = 1$ và một tiệm cận ngang $y = 0$.

Hàm số $y = \frac{2x}{x^2+1}$ có một tiệm cận ngang $y = 0$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	—		—	
$f(x)$	1	2	3	
				$-\infty$

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 2.**B.** 3.**C.** 4.**D.** 1.**Lời giải**

Nhìn bảng biến thiên ta thấy $x=0$ hàm số không xác định nên $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 \Rightarrow y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Vậy hàm số có 3 tiệm cận



Câu 7: Đường thẳng $2y + 1 = 0$ là tiệm cận ngang của hàm số nào sau đây?

A. $y = \frac{x+1}{2x+1}$

B. $y = \frac{x^2+x+1}{1-2x}$

C. $y = \frac{2x+1}{1-x}$

D. $y = \frac{3-x^2}{2x^2-3x+1}$

Lời giải

Hàm số $y = \frac{x+1}{2x+1}$ có tiệm cận ngang $y = \frac{1}{2}$.

Hàm số $y = \frac{x^2+x+1}{1-2x}$ không có tiệm cận ngang.

Hàm số $y = \frac{2x+1}{1-x}$ có tiệm cận ngang $y = -2$.

Hàm số $y = \frac{3-x^2}{2x^2-3x+1}$ có tiệm cận ngang $y = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2y + 1 = 0$.

Câu 8: Cho hàm số $y = 2x - 1 + \frac{3}{x+3}$ (C). Khoảng cách từ $M(2; -1)$ đến tiệm cận xiên của đồ thị (C) là:

A. $\frac{2}{\sqrt{5}}$

B. $y = \frac{4}{\sqrt{5}}$

C. 2

D. 4

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x+3} = 0$. Vậy $y = 2x - 1 \Leftrightarrow 2x - y - 1 = 0$ (Δ) là tiệm cận xiên của đồ thị (C).

Khi đó: $d(M, \Delta) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 - 1|}{\sqrt{4+1}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

Câu 9: Với giá trị nào của m thì tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = x + m + \frac{3}{m-x}$ đi qua điểm $M(1; 2)$

A. $m = 1$

B. $m = 0$

C. $m = 2$

D. Một đáp án khác.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{m-x} = 0$. Vậy $y = x + m$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

Để $M(1; 2)$ nằm trên tiệm cận xiên thì $2 = 1 + m \Leftrightarrow m = 1$.

Câu 10: Đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2-3x+m}{x-m}$ là (C_m). Giá trị của m để đồ thị hàm số (C_m) không có tiệm cận đứng là:

A. $m = 0$.

B. $m = 1$

C. $m = 0$ hoặc $m = 1$.

D. $m = 0$ hoặc $m = -1$.

Lời giải

Hàm số không có tiệm cận đứng khi $x = m$ là nghiệm của:

$$2x^2 - 3x + m = 0 \text{ tức là } 2m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$



Câu 11: Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + 6x - 2}{x + 2}$ có đồ thị (C_m) . Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số (C_m) có tiệm cận đứng và không có tiệm cận xiên.

A. $m = \frac{7}{2}$

B. $m = \frac{3}{2}$

C. $m = 2$

D. $m = 0$

Lời giải

Ta có $m = 0$ thì $y = \frac{6x - 2}{x + 2}$ có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

$$m \neq 0 \text{ thì } y = mx + 6 - 2m + \frac{4m - 14}{x + 2}.$$

Nếu $4m - 14 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{7}{2}$ thì hàm số không có tiệm cận.

Câu 12: Tại một công ty sản xuất đồ chơi A , công ty phải chi 50000USD để thiết lập dây chuyền sản xuất ban đầu. Sau đó, cứ sản xuất được một sản phẩm đồ chơi A , công ty phải chi trả 5USD cho nguyên liệu thô và nhân công. Gọi x ($x \geq 1$) là số đồ chơi A mà công ty đã sản xuất và $T(x)$ (đơn vị USD) là tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất x đồ chơi A . Người ta xác định chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi A là $M(x) = \frac{T(x)}{x}$. Khi x đủ lớn ($x \rightarrow +\infty$) thì chi phí trung bình (USD) cho mỗi sản phẩm đồ chơi A gần nhất với kết quả nào sau đây?

A. 50 000

B. 50005

C. 10

D. 5

Lời giải

Gọi $T(x)$ (đơn vị USD) là tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất x đồ chơi A thì $T(x) = 50000 + 5x$

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{T(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{50000}{x} + 5 \right) = 5.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hàm số dưới đây.

x	$-\infty$	-2	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+		-		+
$f(x)$	$-\infty$	-4	$+\infty$	0	$+\infty$

a) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$

b) Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang

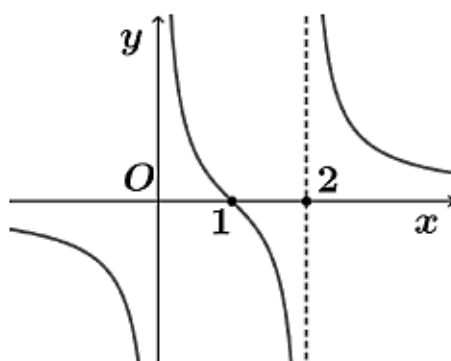


- c) Đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận đứng
d) Hàm số có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$

Lời giải

- a) Sai: Hàm số không xác định tại $x = -1$
b) Sai: Khi $\begin{cases} x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow -\infty \end{cases}$ nên hàm số không có tiệm cận ngang
c) Sai: Hàm số có đúng một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$
d) Sai: $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = +\infty$ nên hàm số không có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$

Câu 2: Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ dưới đây



- a) Hàm số đã cho liên tục trên khoảng $(0; 2)$
b) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$
c) Đồ thị hàm số đã cho không có đường tiệm cận ngang
d) Khoảng cách giữa hai đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số bằng 2.

Lời giải

- a) Đúng: Từ đồ thị ta thấy hàm số đã cho liên tục trên khoảng $(0; 2)$
b) Đúng: Từ đồ thị hàm số ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$
c) Đúng: Hàm số đã cho có đường tiệm cận ngang
d) Đúng: Khoảng cách giữa hai đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số bằng 2.

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x + 2}$ có đồ thị là (C)

- a) Đồ thị hàm số (C) có hai đường tiệm cận.
b) Giao điểm của hai tiệm cận là $I(-2; -6)$.
c) Khoảng cách từ O đến tiệm cận xiên bằng $4\sqrt{2}$.
d) Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (C) đi qua điểm $M(0; -4)$.



Lời giải

a) Đúng: Ta có $y = x - 4 + \frac{10}{x+2}$.

$\lim_{x \rightarrow -2} y = \infty$ nên $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10}{x+2} = 0$ nên $y = x - 4$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

b) Đúng: Giao điểm của hai tiệm cận thỏa mãn $\begin{cases} x = -2 \\ y = x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -6 \end{cases}$.

c) Sai: Khoảng cách từ O đến tiệm cận xiên bằng $\frac{4}{\sqrt{2}}$.

d) Đúng: Mặt khác $-4 = 0 - 4$ nên M nằm trên tiệm cận xiên.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 1}{x - 1} (C_m)$ (m là tham số)

a) Để đồ thị (C_m) của hàm số có tiệm cận xiên thì $m \neq 0$.

b) Để tiệm cận xiên của (C_m) đi qua $M(2, -5)$ thì $m = -8$

c) Để tiệm cận xiên của (C_m) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 8 (đvdt) thì tổng tất cả các giá trị m tìm được bằng 2

d) Với $m = 3$ thì giao điểm của hai đường tiệm cận của (C_m) nằm trên Parabol $y = x^2 + 3$

Lời giải

Hàm số xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

a) Đúng: Ta có $y = x + m + 1 + \frac{m}{x-1}$. Để đồ thị (C_m) của hàm số có tiệm cận xiên thì $m \neq 0$.

Với $m \neq 0$, (C_m) có tiệm cận xiên $y = x + m + 1 (\Delta_m)$ vì $\lim_{x \rightarrow \infty} [y - (x + m + 1)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{m}{x-1} = 0$.

b) Đúng: Để (Δ_m) qua $M(2, -5)$ thì $-5 = 2 + m + 1 \Leftrightarrow m = -8$ (thỏa mãn)

c) Sai: Gọi A là giao điểm của Δ_m với Ox suy ra $A(-m-1; 0)$

Gọi B là giao điểm của Δ_m với Oy suy ra $B(0; m+1)$.

Suy ra: $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} |-m-1| |m+1| = \frac{1}{2} (m+1)^2$

Để $S_{\Delta OAB} = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2} (m+1)^2 = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -5 \\ m = 3 \end{cases}$ (thỏa mãn $m \neq 0$).



d) Sai: Ta có với $m \neq 0, x = 1$ là tiệm cận đứng vì $\lim_{x \rightarrow 1} y = \infty$ nên $y = x + m + 1$ là tiệm cận xiên.

Khi đó giao điểm của 2 tiệm cận là $I(1; m + 2)$.

Để I nằm trên Parabol $y = x^2 + 3$ thì $m + 2 = 1 + 3 \Leftrightarrow m = 2$ (thỏa mãn).

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{2x + m}{mx - 1}$. Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng, tiệm cận ngang và các tiệm cận cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích là 2

Trả lời:

2			
---	--	--	--

Lời giải

Với $m \neq 0$ ta có: $S = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{m} \right| \cdot \left| \frac{2}{m} \right| = 2 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Câu 2: Chi phí để loại $x(\%)$ chất gây ô nhiễm là C (nghìn đô) với $C(x) = \frac{12x}{100 - x}$. Tính chi phí để loại bỏ 50% chất gây ô nhiễm?

Trả lời:

1	2		
---	---	--	--

Lời giải

Khi $x = 50$ thì $C(50) = \frac{12 \cdot 50}{100 - 50} = 12$ (nghìn đô)

Vậy chi phí để loại bỏ 50% chất gây ô nhiễm là 12 nghìn đô.

Câu 3: Anh An là một nhà quy hoạch đô thị, mô hình hóa dân số $P(t)$ (nghìn người) của vùng anh ấy sống sau t năm kể từ thời điểm hiện tại là $P(t) = \frac{40t}{t^2 + 10} - \frac{50}{t + 1} + 70$. Dân số mà anh An dự kiến trong dài hạn là bao nhiêu nghìn người (khi $t \rightarrow +\infty$)

Trả lời:

7	0		
---	---	--	--

Lời giải

Ta có: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{40t}{t^2 + 10} = 0$; $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-50}{t + 1} = 0$ suy ra $P(t) = 70$.

Vậy dân số mà anh An dự kiến trong dài hạn là 70 nghìn người.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + (m^2 + m + 2)x + m^2 + 3}{x + 1}$. Tìm $m \in \mathbb{R}$ để khoảng cách từ gốc O đến tiệm cận xiên hoặc ngang là nhỏ nhất



Trả lời:

0			
---	--	--	--

Lời giải

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$

$$y = \frac{mx^2 + (m^2 + m + 2)x + m^2 + 3}{x + 1} = mx + m^2 + 2 + \frac{1}{x + 1}, x \neq -1$$

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + 1} = 0$ nên $(d): y = mx + m^2 + 2 \Leftrightarrow (d): mx - y + m^2 + 2 = 0$ là đường cận xiên hoặc ngang của hàm số.

$$\text{Ta có: } d(O; d) = \frac{|m^2 + 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{m^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}} \geq 2$$

$$\text{Vậy } d(O; d) \text{ nhỏ nhất bằng } 2 \text{ khi } \sqrt{m^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}} \Leftrightarrow m = 0.$$

Khi đó hàm số có tiệm cận ngang là $y = 2$

Câu 5: Nồng độ thuốc trong máu của một bệnh nhân t giờ sau khi tiêm là $C(t) \left(\frac{mg}{ml} \right)$ với $C(t)$ được cho bởi công thức $C(t) = \frac{0,4}{t^{1,2} + 1} + 0,013$. Tìm nồng độ thuốc tồn dư, tức là nồng độ thuốc vẫn còn trong cơ thể bệnh nhân trong dài hạn (khi $t \rightarrow +\infty$) (làm tròn đến hàng phần trăm)

Trả lời:

0	,	0	1
---	---	---	---

Lời giải

$$\text{Ta có: } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{40t}{t^2 + 10} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{0,4}{t^{1,2} + 1} + 0,013 \right) = 0,013 \left(\frac{mg}{ml} \right)$$

Câu 6: Hai loài cùng tồn tại trong cùng một hệ sinh thái. Sau t năm, số lượng cá thể loài I là $P(t)$ nghìn con, số lượng cá thể loài II là $Q(t)$ nghìn con, trong đó P và Q được mô hình hóa bởi các hàm $Q(t) = \frac{64}{4 - t}$ với mọi $t \geq 0$ sao cho số lượng cá thể tương ứng là đại lượng không âm. Tìm số lượng cá thể ban đầu của mỗi loài II

Trả lời:

1	6		
---	---	--	--

Lời giải

$$\text{Ta có: } Q(0) = \frac{64}{4 - 0} = 16 \text{ (nghìn con).}$$

----- HẾT -----



BUỔI 06: KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐTHS

Chuyên đề tính đơn điệu của hàm số gồm lý thuyết và ví dụ minh họa

Sưu tầm và biên soạn: Phan Nhật Linh

KẾT NỐI TRI THỨC

Tài liệu khóa học luyện thi THPT Quốc Gia theo chương trình mới

A // LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Khảo sát và lập bảng biến thiên của hàm số

Để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$ thì ta thực hiện theo các bước sau đây:

Bước 1: Tìm tập xác định D của hàm số

Bước 2: Xét sự biến thiên của hàm số:

Tìm đạo hàm $f'(x)$ rồi xét dấu đạo hàm, xác định các khoảng đơn điệu, cực trị (nếu có) của hàm số

Tìm giới hạn tại vô cực và giới hạn vô cực của hàm số cũng như là các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có)

Lập bảng biến thiên của hàm số

Bước 3: Vẽ đồ thị hàm số:

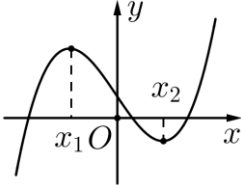
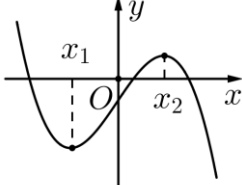
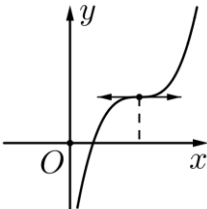
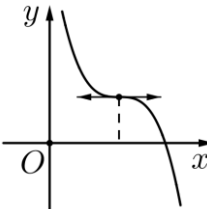
Xác định các điểm cực trị (nếu có), giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (nếu có và dễ tìm),...

Vẽ các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có)

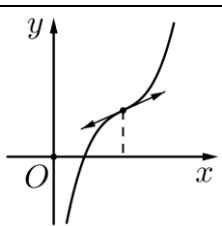
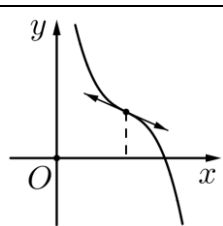
Vẽ đồ thị hàm số

Chú ý: Khi vẽ đồ thị, nên xác định thêm một số điểm đặc biệt của đồ thị, chẳng hạn tìm giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (khi có và việc tìm không quá phức tạp). Ngoài ra cần lưu ý đến tính đối xứng của đồ thị (đối xứng tâm, đối xứng trục).

2. Khảo sát hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt	 $\Delta_{y'} > 0 \Leftrightarrow b^2 - 3ac > 0$	 $\Delta_{y'} > 0 \Leftrightarrow b^2 - 3ac > 0$
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép		



	$\Delta_{y'} = 0 \Leftrightarrow b^2 - 3ac = 0$	$\Delta_{y'} = 0 \Leftrightarrow b^2 - 3ac = 0$
Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm	 $\Delta_{y'} < 0 \Leftrightarrow b^2 - 3ac < 0$	 $\Delta_{y'} < 0 \Leftrightarrow b^2 - 3ac < 0$

Bảng biến thiên

$a > 0$					$a < 0$				
x	$-\infty$	$x_{\text{CĐ}}$	x_{CT}	$+\infty$	x	$-\infty$	x_{CT}	$x_{\text{CĐ}}$	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+	-	0	+	0
y	$-\infty$	$y_{\text{CĐ}}$	y_{CT}	$+\infty$	y	$+\infty$	y_{CT}	$y_{\text{CĐ}}$	$-\infty$
$y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt					$y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt				
x	$-\infty$	$-\frac{b}{3a}$		$+\infty$	x	$-\infty$	$-\frac{b}{3a}$		$+\infty$
y'	+	0	+		y'	-	0	-	
y	$-\infty$			$+\infty$	y	$+\infty$			$-\infty$
$y' = 0$ có nghiệm kép					$y' = 0$ có nghiệm kép				
x	$-\infty$			$+\infty$	x	$-\infty$			$+\infty$
y'		+			y'		-		
y	$-\infty$			$+\infty$	y	$+\infty$			$-\infty$
$y' = 0$ vô nghiệm					$y' = 0$ vô nghiệm				

Chú ý: Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ và $y'' = 6ax + 2b$.

Khi đó: $y'' = 6ax + 2b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}$.

Đồ thị của hàm số bậc ba luôn nhận điểm $I(x_0; y_0)$ làm tâm đối xứng, trong đó $x_0 = -\frac{b}{3a}$ là nghiệm của phương trình $y'' = 0$ và $y_0 = y(x_0)$. Điểm $I(x_0; y_0)$ được gọi là **điểm uốn** của đồ thị này, nó cũng là trung điểm của đoạn thẳng nối 2 điểm cực trị (nếu có).

Ví dụ 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 1$

b) $y = -2x^3 + 3x + 1$



3. Khảo sát hàm phân thức hữu tỉ $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0; ad - bc \neq 0$)

$ad - bc > 0$	$ad - bc < 0$																								
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{d}{c}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td colspan="2">+</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td>$\frac{a}{c}$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$	y'	+		+	y	$\frac{a}{c}$	$+\infty$	$-\infty$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{d}{c}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td colspan="2">-</td><td>-</td></tr><tr><td>y</td><td>$\frac{a}{c}$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$	y'	-		-	y	$\frac{a}{c}$	$+\infty$	$-\infty$
x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$																						
y'	+		+																						
y	$\frac{a}{c}$	$+\infty$	$-\infty$																						
x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$																						
y'	-		-																						
y	$\frac{a}{c}$	$+\infty$	$-\infty$																						

Chú ý: Đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$):

- Có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -\frac{d}{c}$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{a}{c}$.
- Nhận giao điểm của 2 đường tiệm cận $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ làm tâm đối xứng.
- Nhận 2 đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm trục đối xứng.

Ví dụ 2: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số sau:

a) $y = \frac{-2x+1}{2x+2}$

b) $y = \frac{x-3}{x-1}$



4. Khảo sát hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n} (a \neq 0; m \neq 0)$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{n}{m} \right\}$.

Đạo hàm $y' = \frac{am.x^2 + 2an.x + bn - mc}{(mx + n)^2}$. Đặt $g(x) = am.x^2 + 2an.x + bn - mc$.

Dấu của y' là dấu của $g(x) = am.x^2 + 2an.x + bn - mc$.

	$am > 0$	$am < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm		

**Bảng biến thiên**

$am > 0$						$am < 0$						
x	$-\infty$	x_{CD}	$-\frac{n}{m}$	x_{CT}	$+\infty$	x	$-\infty$	x_{CT}	$-\frac{n}{m}$	x_{CD}	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+	-	0	+	+	0	-
y	y_{CD}			y_{CT}		y_{CT}			y_{CD}			
Hàm số có 2 cực trị						Hàm số có 2 cực trị						
x	$-\infty$	$-\frac{n}{m}$			$+\infty$	x	$-\infty$	$-\frac{n}{m}$			$+\infty$	
y'	+				+	y'	-				-	
y	$+\infty$				$+\infty$	y	$+\infty$				$+\infty$	
Hàm số không có cực trị						Hàm số không có cực trị						

Chú ý: Đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a \neq 0, m \neq 0$, đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu):

- Có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -\frac{n}{m}$, tiệm cận xiên là đường thẳng $y = \frac{a}{m}x - \frac{an - bm}{m^2}$.
- Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng, tâm đối xứng này cũng là trung điểm của đoạn thẳng nối 2 điểm cực trị (nếu có).
- Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm trục đối xứng.

Ví dụ 3: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{-x^2 + 3x - 1}{x - 2}$

**B VÍ DỤ MINH HỌA****Câu 1:** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 1$

b) $y = -2x^3 - 3x^2 + 1$

c) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

d) $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$

Lời giải

a) $y = x^3 - 3x^2 + 1$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

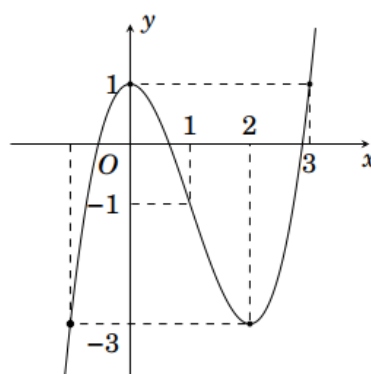
Sự biến thiên: $y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	1	-3	$+\infty$		

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ và đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0; y_{CD} = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = 2; y_{CT} = -3$.



Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(2; -3); (-1; -3); (3; 1)$

Đồ thị nhận điểm $I(1; -1)$ làm tâm đối xứng

b) $y = -2x^3 - 3x^2 + 1$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Sự biến thiên: $y' = -6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty$

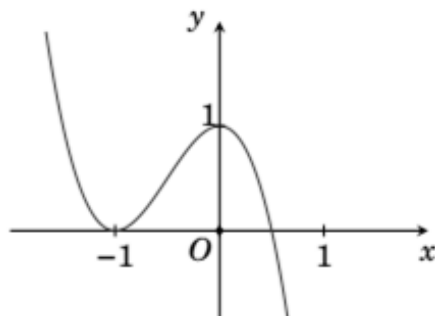
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$		0	1		$-\infty$



Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;+\infty)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=0; y_{CD}=1$ và đạt cực tiểu tại $x=-1; y_{CT}=0$.



Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(1;-4); (-2;5)$

Đồ thị nhận điểm $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ làm tâm đối xứng

c) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

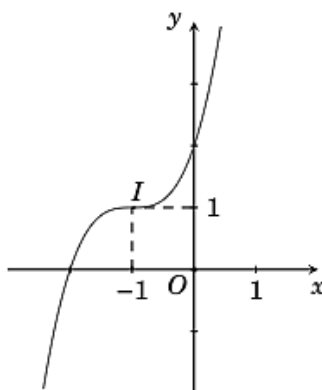
Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Sự biến thiên: $y' = 3x^2 + 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+	0	+
y	$-\infty$	1	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và hàm số không có cực trị



Đồ thị nhận điểm $I(-1;1)$ làm tâm đối xứng

d) $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Sự biến thiên: $y' = 3x^2 - 6x + 4 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty$

Bảng biến thiên:

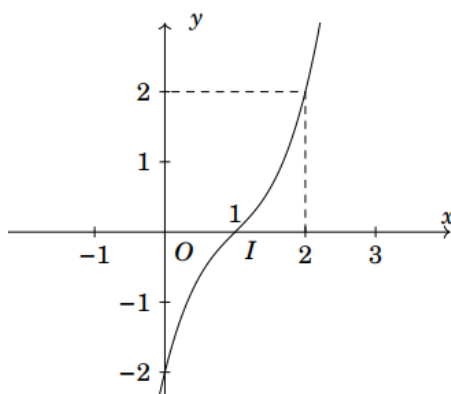


x	$-\infty$	$+\infty$
y'	+	
y	$-\infty$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và hàm số không có cực trị

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(2;2);(0;-2);(1;0)$

Đồ thị nhận điểm $I(1;0)$ làm tâm đối xứng



Câu 2: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \frac{x+1}{x-2}$

b) $y = \frac{2x+1}{x+1}$

c) $y = \frac{x+3}{1-x}$

d) $y = \frac{5+x}{2-x}$

Lời giải

a) Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Sự biến thiên: $y' = -\frac{3}{(x-2)^2} < 0$ với mọi $x \neq 2$.

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$ và hàm số không có cực trị.

Tiệm cận:

• $\lim_{x \rightarrow 2^-} y = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-2} = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-2} = 1$.

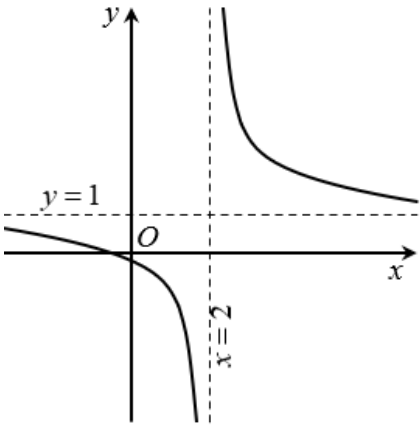
Do đó, đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	1	$+\infty$	1



Đồ thị



Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$.

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là điểm $(-1; 0)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(2; 1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm trục đối xứng.

b) $y = \frac{2x+1}{x+1}$

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Sự biến thiên: Đạo hàm: $y' = \frac{2(x+1) - (2x-1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$ với mọi $x \neq -1$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$ và hàm số không có cực trị.

Tiệm cận:

- $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{2x+1}{x+1} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{2x+1}{x+1} = -\infty$

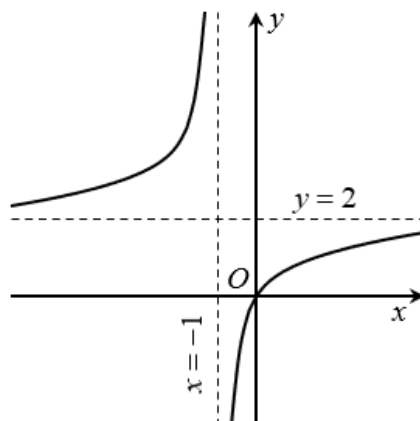
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 2$

Do đó $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số và $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	2	$+\infty$	2



Đồ thị



Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là $(0;1)$ và giao với trục hoành tại điểm $\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $(-1;2)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của góc tạo bởi hai đường tiệm cận này là trục đối xứng.

c) $y = \frac{x+3}{1-x}$

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Sự biến thiên có đạo hàm $y' = \frac{(1-x) + (x+3)}{(1-x)^2} = \frac{4}{(1-x)^2} > 0$ với mọi $x \neq 1$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$ và hàm số không có cực trị.

Tiệm cận

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+3}{1-x} = -\infty; \lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+3}{1-x} = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}-1} = -1; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}-1} = -1$$

Do đó $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số và $y=-1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên:

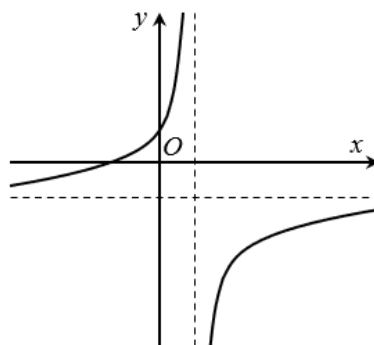
x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+		+
y	-1	$+\infty$	-1

Đồ thị

Giao điểm của đồ thị với trục tung là $(0;3)$, giao điểm của đồ thị với trục hoành là $(-3;0)$.



Đồ thị của hàm số nhận giao điểm $I(1; -1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm trục đối xứng.



d) $y = \frac{5+x}{2-x}$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Sự biến thiên: Đạo hàm $y' = \frac{7}{(-x+2)^2} > 0$ với mọi $x \neq 2$

Giới hạn và tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow 2^-} y = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+3}{1-x} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+3}{1-x} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -1$

Do đó $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số và $y = -1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên:

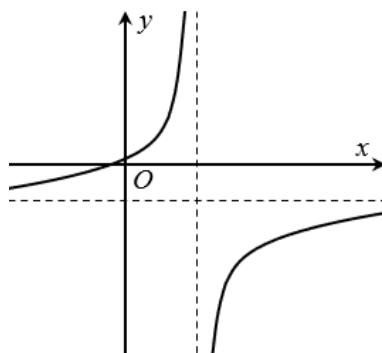
x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	+		+
y	-1	$+\infty$	-1

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$ và hàm số không có cực trị.

Đồ thị

Giao điểm của đồ thị với trục tung là $(0; 3)$, giao điểm của đồ thị với trục hoành là $(-3; 0)$.

Đồ thị của hàm số nhận giao điểm $I(1; -1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm trục đối xứng.





Câu 3: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$

b) $y = \frac{x^2 + x - 2}{x + 1}$

c) $y = \frac{2x^2 - x + 4}{x - 1}$

d) $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 3}$

Lời giải

a) Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Sự biến thiên: $y = x + 1 + \frac{1}{x - 2}$.

Ta có: $y' = 1 - \frac{1}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}$. Vậy $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$.

Trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$ $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên từng khoảng này.

Trên các khoảng $(1; 2)$ và $(2; 3)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên từng khoảng này.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ với $y_{CD} = 1$; hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$ với $y_{CT} = 5$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = +\infty.$$

$$\text{Tiệm cận: } \lim_{x \rightarrow 2^-} y = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(x + 1 + \frac{1}{x - 2} \right) = -\infty; \lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(x + 1 + \frac{1}{x - 2} \right) = +\infty$$

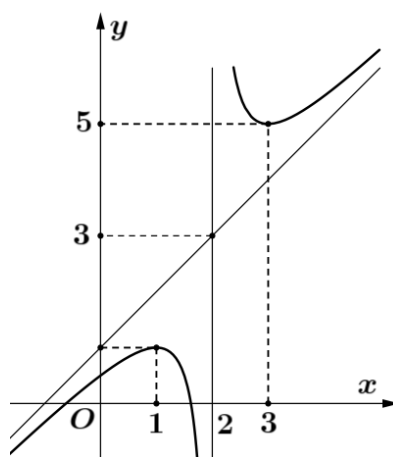
$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - 2} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x - 2} = 0.$$

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$, tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x + 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	$\nearrow$ 1	$\searrow$ $-\infty$	$\nwarrow$ $+\infty$	5 $\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị:



Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Ta có $y = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ hoặc $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là các điểm $\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; 0\right)$ và $\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; 0\right)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(2; 3)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

b) Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Sự biến thiên: Viết $y = x - \frac{2}{x+1}$ ta có $y' = 1 + \frac{2}{(x+1)^2} > 0$ với mọi $x \neq -1$.

Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$. Hàm số không có cực trị.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = +\infty$$

Tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow -1^-} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(x - \frac{2}{x+1}\right) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(x - \frac{2}{x+1}\right) = -\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [y - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{x+1}\right) = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} [y - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{2}{x+1}\right) = 0.$$

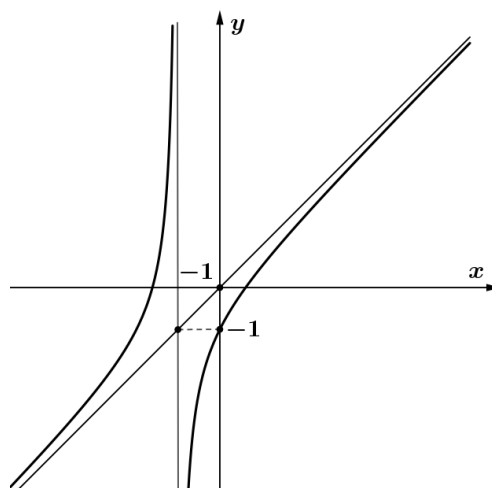
Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$, tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x$.

Bảng biến thiên:



x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Đồ thị:



Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $(0; -2)$

Ta có $y = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 2}{x + 1} = 0 \Leftrightarrow x = -2$ hoặc $x = 1$.

Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là các điểm $(-2; 0)$ và $(1; 0)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(-1; -1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

c) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Sự biến thiên: Ta có $y = \frac{2x^2 - x + 4}{x - 1} = 2x + 1 + \frac{5}{x - 1}$

Đạo hàm $y' = 2 - \frac{5}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{5}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 - \sqrt{10}}{2}$ hoặc $x = \frac{2 + \sqrt{10}}{2}$.

Trên các khoảng $\left(-\infty; \frac{2 - \sqrt{10}}{2}\right)$ và $\left(\frac{2 + \sqrt{10}}{2}; +\infty\right)$ có $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên từng khoảng này.

Trên các khoảng $\left(\frac{2 - \sqrt{10}}{2}; 1\right)$ và $\left(1; \frac{2 + \sqrt{10}}{2}\right)$ có $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng này.



Hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{2 - \sqrt{10}}{2}$ và đạt cực tiểu tại $x = \frac{2 + \sqrt{10}}{2}$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x - 1} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x - 1} = 0.$$

Do đó $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số và $y = 2x + 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên

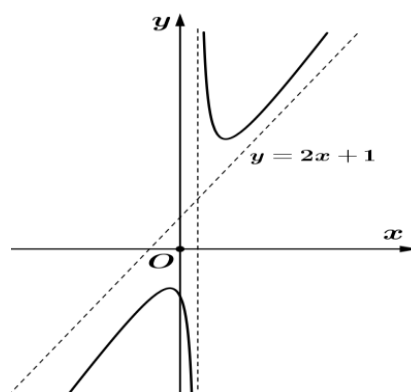
x	$-\infty$	$\frac{1}{2} \left(-\sqrt{10} + 2 \right)$	1	$\frac{1}{2} \left(\sqrt{10} + 2 \right)$	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$-2\sqrt{10} + 3$	$-\infty$	$2\sqrt{10} + 3$	$+\infty$	$+\infty$

Đồ thị

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là $(0; -4)$.

Đồ thị hàm số không cắt trục hoành.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(1; 3)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm trục đối xứng.



Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

Sự biến thiên: Ta có $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 3} = x - 1 + \frac{4}{x + 3}$

$$\text{Đạo hàm } y' = 1 - \frac{4}{(x + 3)^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{(x + 3)^2} = 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -5 \end{cases}$$



Trên các khoảng $(-\infty; -5)$ và $(-1; +\infty)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên các khoảng này.

Trên các khoảng $(-5; -3)$ và $(-3; -1)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên các khoảng này.

Hàm số đạt cực đại tại $x = -5$ với $y_{CD} = -8$; hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ với $y_{CT} = 0$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x \left(1 + \frac{3}{x}\right)} = +\infty;$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x \left(1 + \frac{3}{x}\right)} = -\infty$$

Tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 3} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 3} = -\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x + 3} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x + 3} = 0$$

Do đó $x = -3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số và $y = x - 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên

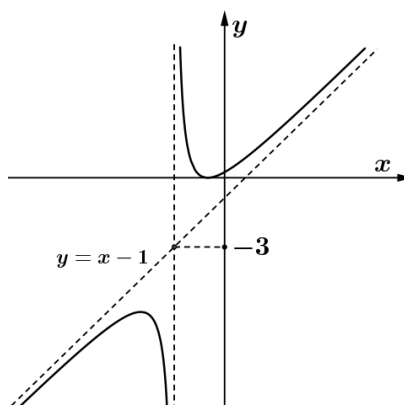
x	$-\infty$	-5	-3	-1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-8	$+\infty$	0	$+\infty$	

Đồ thị:

Giao điểm của đồ thị với trục tung là $\left(0; \frac{1}{3}\right)$

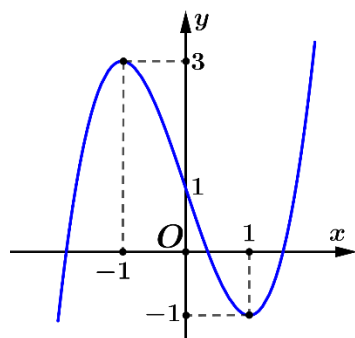
Giao điểm của đồ thị với trục hoành là $(-1; 0)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $(-3; -4)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.





Câu 4: Đường cong dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



- A.** $y = x^3 - 3x + 1$. **B.** $y = x^3 - 3x^2 + 1$. **C.** $y = -x^3 - 3x - 1$. **D.** $y = -x^3 + 3x + 1$.

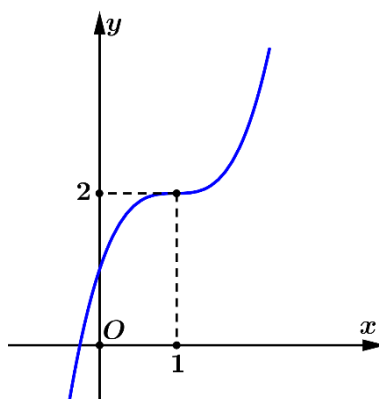
Lời giải

Đồ thị hàm số trên là đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

Nhìn vào nhánh phải của đồ thị ta thấy đồ thị có hướng đi lên suy ra $a > 0$

Hàm số có hai cực trị $x = \pm 1$ nên hàm số thỏa đề là $y = x^3 - 3x + 1$

Câu 5: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường cong như hình vẽ dưới đây. Hỏi hàm số $y = f(x)$ là hàm số nào?



- A.** $y = x^3 - 3x + 1$. **B.** $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.
C. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$. **D.** $y = -x^3 - 3x^2 - 1$.

Lời giải

Nhìn dạng đồ thị thấy $a > 0$, suy ra loại B, D

Mặt khác hàm số không có cực trị nên loại A

Câu 6: Bảng biến thiên trong hình dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	—		—
$f(x)$	-1	$+\infty$	-1

- A.** $y = \frac{x+3}{x-1}$. **B.** $y = \frac{-x-2}{x-1}$. **C.** $y = \frac{-x+3}{x-1}$. **D.** $y = \frac{-x-3}{x-1}$.

Lời giải



Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy ngay tiệm cận đứng $x = 1$, tiệm cận ngang $y = -1$. suy ra loại đáp án A

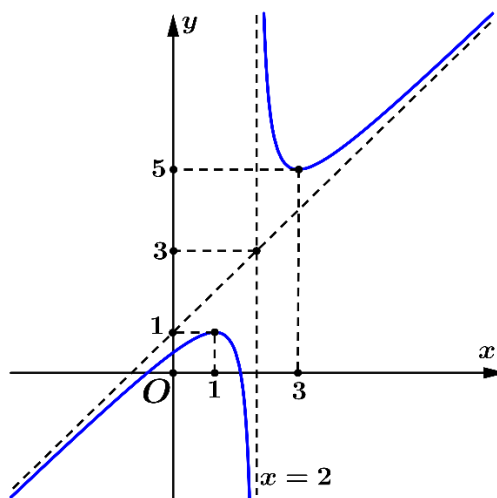
Nhìn vào bảng biến thiên, hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

$$y = \frac{-x-2}{x-1} \text{ có } ad - bc = 3 > 0 \text{ loại đáp án B}$$

$$y = \frac{-x-3}{x-1} \text{ có } ad - bc = 4 > 0 \text{ loại đáp án D}$$

$$y = \frac{-x+3}{x-1} \text{ có } ad - bc = -2 < 0 \text{ chọn đáp án C}$$

Câu 7: Đường cong như hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



A. $y = \frac{x^2 - x - 1}{x + 2}$.

B. $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$.

C. $y = \frac{x^2 - 2x - 1}{x - 2}$.

D. $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 2}$.

Lời giải

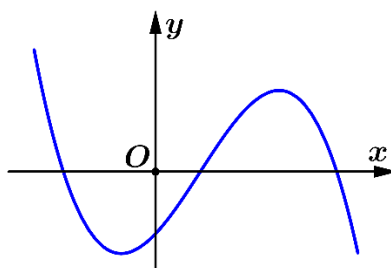
Đồ thị có TCD $x = 2$ loại đáp án A

Đồ thị giao với trục Oy tại điểm có tung độ $\frac{1}{2}$ loại đáp án D

Đồ thị đi qua điểm $(1; 1)$ loại đáp án C

Vậy hàm số thỏa mãn đề bài là hàm số của đáp án B

Câu 8: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình dưới. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$.

B. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

C. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

D. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

Lời giải



Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \Rightarrow a < 0$.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ âm, suy ra $d < 0$.

$$\begin{cases} x_{CT}x_{CD} < 0 \\ x_{CT} + x_{CD} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{c}{3a} < 0 \\ \frac{-2b}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c > 0 \\ b > 0 \end{cases} \quad (\text{do } a < 0).$$

Vậy $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

Câu 9: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$					

Trong các hệ số a, b, c, d có bao nhiêu số âm?

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

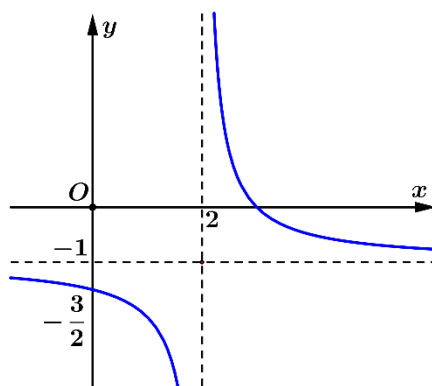
Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số có 2 điểm cực trị nên bậc của đa thức phải lớn hơn 2

Vậy $a \neq 0$ mà $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty \Rightarrow a < 0$.

Từ bảng biến thiên ta có $d = y(0) > y(-1) = 0$.

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ có hai nghiệm là -1 và 2 nên
$$\begin{cases} -\frac{2b}{3a} = -1 + 2 = 1 > 0 \\ \frac{c}{3a} = (-1) \cdot 2 = -2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b > 0 \\ c > 0 \end{cases}$$

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{cx+2}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}; c \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Giá trị của biểu thức $T = a + b + c$ bằng:

A. -3 .

B. 5 .

C. -4 .

D. 3 .

Lời giải



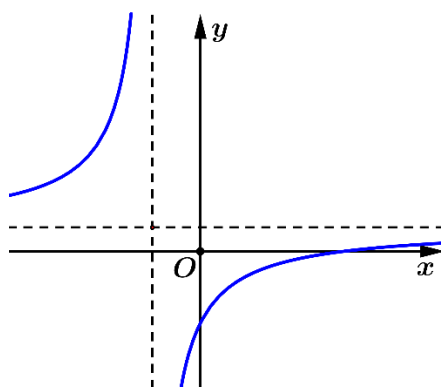
Đường tiệm cận đứng $x = 2$ suy ra $-\frac{2}{c} = 2 \Leftrightarrow c = -1$

Đường tiệm cận ngang $y = -1$ suy ra $\frac{a}{c} = -1 \Leftrightarrow a = -c = 1$

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục Oy tại điểm $\left(0; -\frac{3}{2}\right)$ suy ra $-\frac{b}{2} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow b = 3$

Vậy $T = a + b + c = 3$

Câu 11: Hình vẽ dưới đây là đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng:



- A.** $ab > 0; bd < 0$. **B.** $ab < 0; ad > 0$. **C.** $ab < 0; ad < 0$. **D.** $bd > 0; ad > 0$.

Lời giải

Đường tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$ mà theo đồ thị $-\frac{d}{c} < 0 \Rightarrow cd > 0$ (1)

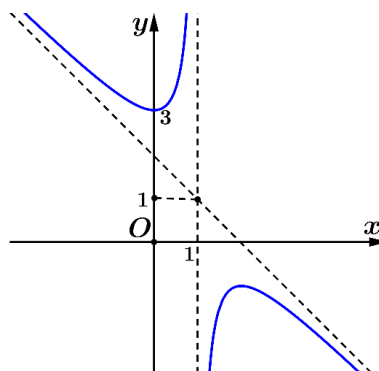
Đường tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$ mà theo đồ thị $\frac{a}{c} < 0 \Rightarrow ac < 0$ (2)

Giao điểm của hàm số với trục tung tại điểm có tung độ $y = \frac{b}{d}$ mà $\frac{b}{d} > 0 \Rightarrow bd > 0$ (3)

Giao điểm của hàm số với trục hoành tại điểm có hoành độ $x = -\frac{b}{a}$ mà $-\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow ab < 0$ (4)

Lấy (3).(4) ta được $ad.b^2 < 0 \Rightarrow ad < 0$ mà theo (4) thì $ab < 0$

Câu 12: Cho hàm số hữu tỉ $y = ax + 2 + \frac{b}{x+c}$ có đồ thị như hình bên dưới. Tính $P = a + b + c$.



**A.** -3.**B.** 1.**C.** 0.**D.** 4.**Lời giải**

Ta có: $y = ax + 2 + \frac{b}{x+c}$.

Nên đồ thị của hàm số có đường tiệm cận xiên là $y = ax + 2$, mà như hình vẽ đường tiệm cận xiên đi qua điểm $(1;1)$ suy ra $1 = a \cdot 1 + 2 \Leftrightarrow a = -1$.

Đồ thị của hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 1$ nên $1 + c = 0 \Leftrightarrow c = -1$.

Khi đó hàm số đã cho có dạng $y = -x + 2 + \frac{b}{x-1}$.

Mặt khác đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;3)$ nên $-0 + 2 + \frac{b}{0-1} = 3 \Leftrightarrow 2 - b = 3 \Leftrightarrow b = -1$.

Vậy $P = a + b + c = -1 + (-1) + (-1) = -3$.

Câu 13: Trong phòng thí nghiệm người ta xác định được số lượng vi khuẩn được nuôi cấy tính theo công thức $N(t) = 1000 + \frac{100t}{100+t^2}$ (con vi khuẩn). Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi nuôi cấy.

**Trả lời:**

1	0	0	5
---	---	---	---

Lời giải

Xét hàm số $N(t) = 1000 + \frac{100t}{100+t^2}, (t > 0)$ có $N'(t) = \frac{100(100+t^2) - 2t \cdot 100t}{(100+t^2)^2} = \frac{100(100-t^2)}{(100+t^2)^2}$

Giải phương trình $N'(t) = 0 \Leftrightarrow 100 - t^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 10 (N) \\ t = -10 (L) \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

t	0	10	$+\infty$
$N'(t)$	+	0	-
$N(t)$	1000	1005	1000

Vậy số lượng vi khuẩn lớn nhất nuôi cấy được là 1005 con.



Câu 14: Một công ty chuyên sản xuất dụng cụ thể thao nhận được đơn đặt hàng sản xuất 8000 quả bóng rổ. Công ty có một số máy móc, mỗi máy có khả năng sản xuất 30 bóng rổ trong một giờ. Chi phí thiết lập mỗi máy là 200 nghìn đồng. Sau khi thiết lập, quá trình sản xuất sẽ diễn ra hoàn toàn tự động và chỉ cần có người giám sát. Chi phí trả cho người giám sát là 192 nghìn đồng mỗi giờ. Công ty cần sử dụng bao nhiêu máy móc để chi phí hoạt động đạt mức thấp nhất?



Trả lời:

1	6		
---	---	--	--

Lời giải

Gọi số máy móc công ty sử dụng để sản xuất là $x(x \in \mathbb{N}, x > 0)$.

Thời gian cần để sản xuất hết 8000 quả bóng là: $\frac{8000}{30x}$.

Tổng chi phí để sản xuất là: $P(x) = 200x + \frac{8000}{30x} \cdot 192 = 200x + \frac{51200}{x}$

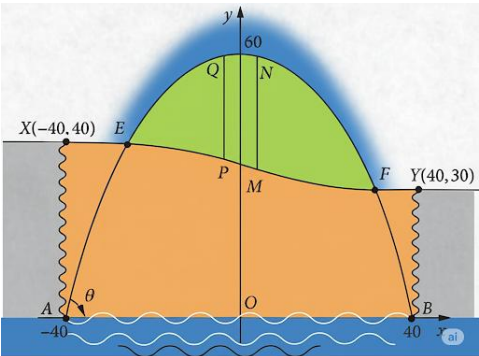
Ta có: $P'(x) = 200 - \frac{51200}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 256 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ x = -16(L) \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	0	16	$+\infty$
$P'(x)$	-	0	+
$P(x)$	↘ 6400 ↗		

Vậy công ty nên sử dụng 16 máy để chi phí hoạt động là thấp nhất.

Câu 15: Một thành phố nằm trên một con sông chảy qua hẻm núi. Hẻm có chiều ngang 80m, một bên cao 40 m và một bên cao 30 m. Một cây cầu sẽ được xây dựng bắc qua sông và hẻm núi. Sơ đồ thiết kế của cây cầu được gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ dưới đây.





Con đường XY xuyên qua hẻm núi được mô hình hóa bằng phương trình: $y = \frac{x^3}{25600} - \frac{3x}{16} + 35$

Hai cột đỡ dọc MN và PQ (song song với trục Oy) là đoạn nối giữa khung của parabol và đường XY . Tính tổng độ dài đoạn MN và PQ biết rằng N và Q là hai điểm đối xứng qua Oy và MN là đoạn có độ dài lớn nhất (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục)

Trả lời:

4 9 , 5

Lời giải

Theo bài ra ta có: phương trình của Parabol là $y = 60 - \frac{3}{80}x^2$.

Khoảng cách giữa khung Parabol và đường xuyên núi là:

D = 60 - \frac{3}{80}x^2 - (\frac{x^3}{25600} - \frac{3x}{16} + 35) với x \in (-23,71; 27,99)

Xét D' = -\frac{3}{40}x - \frac{3x^2}{25600} + \frac{3}{16} = 0 \Leftrightarrow x = 2,49

Bảng biến thiên:

Table with 3 rows and 4 columns: x, -23,71, 2,49, 27,99; D'(x), +, 0, -; D(x), 0, 25,23, 0. Includes arrows indicating the trend of the function.

Dựa vào bảng biến thiên, MN là đoạn có độ dài lớn nhất khi x = 2,49

Suy ra MN = D_MN = 60 - \frac{3}{80}.2,49^2 - (\frac{2,49^3}{25600} - \frac{3.2,49}{16} + 35) \approx 25,23

Vì N và Q là hai điểm đối xứng qua Oy \Rightarrow x_{PQ} \approx -2,49

Suy ra PQ = D_{PQ} = 60 - \frac{3}{80}.2,49^2 - (\frac{-2,49^3}{25600} - \frac{3.-2,49}{16} + 35) \approx 24,3

Vậy tổng độ dài MN + PQ = 49,5.

Câu 16: Trong hệ trục tọa độ (Oxy) cho đồ thị hàm số (C): y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} mô tả chuyển động của hai tàu đánh cá A và B (đơn vị trên mỗi trục tọa độ tính bằng km). Biết quỹ đạo chuyển động của hai tàu luôn thuộc về hai nhánh khác nhau của đồ thị (C). Tính khoảng cách ngắn nhất (đơn vị km) giữa hai tàu đánh cá A và B (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Trả lời:

4 9 , 5



Lời giải

Ta có $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = x + \frac{1}{x + 1}, (x \neq -1)$

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = -1$, gồm hai nhánh nằm về hai phía của đường thẳng $x = -1$.

Gọi A là điểm thuộc nhánh trái của đồ thị hàm số, khi đó $x_A < -1$.

Đặt $a = -1 - x_A > 0 \Rightarrow x_A = -1 - a$

$\Rightarrow y_A = -1 - a + \frac{1}{-1 - a + 1} = -1 - a - \frac{1}{a} \Rightarrow A\left(-1 - a; -1 - a - \frac{1}{a}\right)$

Gọi B là điểm thuộc nhánh phải của đồ thị hàm số, khi đó $x_B > -1$.

Đặt $b = x_B + 1 > 0 \Rightarrow x_B = b - 1$

$\Rightarrow y_B = b - 1 + \frac{1}{b - 1 + 1} = b - 1 + \frac{1}{b} \Rightarrow B\left(b - 1; b - 1 + \frac{1}{b}\right)$

$\Rightarrow AB^2 = (b + a)^2 + \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)^2 = (b + a)^2 + (b + a)^2 \cdot \left(\frac{1}{ab}\right)^2 = (a + b)^2 \left(2 + \frac{2}{ab} + \frac{1}{a^2 b^2}\right)$

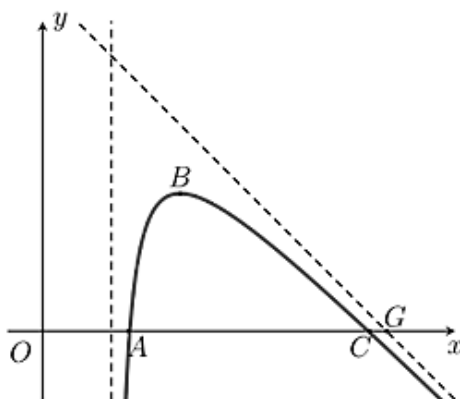
Với $a > 0, b > 0$ ta có $\begin{cases} (a + b)^2 \geq 4ab \\ 2 + \frac{1}{a^2 b^2} \geq 2\sqrt{\frac{2}{a^2 b^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{ab} \end{cases}$

Nên $AB^2 \geq 4ab \cdot \left(\frac{2}{ab} + \frac{2\sqrt{2}}{ab}\right) = 8 + 8\sqrt{2} \Rightarrow AB \geq \sqrt{8 + 8\sqrt{2}} \approx 4,39$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 2 = \frac{1}{a^2 b^2} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

Vậy khoảng cách ngắn nhất (đơn vị km) giữa hai tàu đánh cá A và B là $4,39$ (km).

Câu 17: Một máy bay trình diễn có đường bay gần với hệ trục Oxy được mô phỏng như hình vẽ, trục Ox gần với mặt đất.



Đường bay có dạng là một phần của đồ thị hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất $y = f(x)$ có đường tiệm cận đứng là $x = 2$. Điểm G là giao điểm của đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục Ox được gọi là điểm giới hạn. Biết máy bay bay từ vị trí A cách tọa độ O một khoảng $2,5$ đơn vị và máy bay khi ở vị trí cao nhất cách điểm xuất phát $1,5$ đơn vị theo

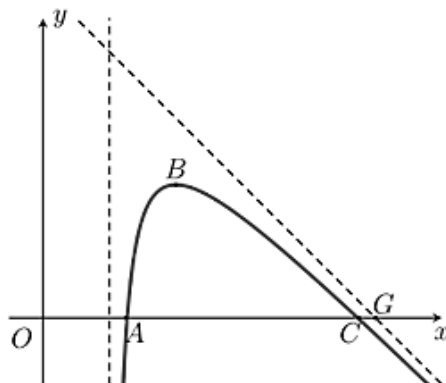


phương song song với trục Ox và cách mặt đất 4,5 đơn vị. Vị trí máy bay tiếp đất cách điểm giới hạn một khoảng bằng bao nhiêu?

Trả lời:

-	3		
---	---	--	--

Lời giải



Vì tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ (hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất) là $x = 2$.

Hàm số có dạng $y = f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$ ($a < 0$).

Đồ thị hàm số qua điểm $A\left(\frac{5}{2}; 0\right)$ và nhận $B\left(4; \frac{9}{2}\right)$ làm điểm cực trị, suy ra:

$$\begin{cases} f\left(\frac{5}{2}\right) = 0 \\ f(4) = \frac{9}{2} \\ f'(4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}a + b + 2c = 0 \\ 4a + b + \frac{1}{2}c = \frac{9}{2} \\ a - \frac{1}{4}c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{21}{2} \\ c = -4 \end{cases} \text{ Khi đó: } f(x) = -x + \frac{21}{2} - \frac{4}{x-2}.$$

Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên: $y = -x + \frac{21}{2}$. Tọa độ điểm $G\left(\frac{21}{2}; 0\right)$.

Phương trình cho hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với trục Ox là

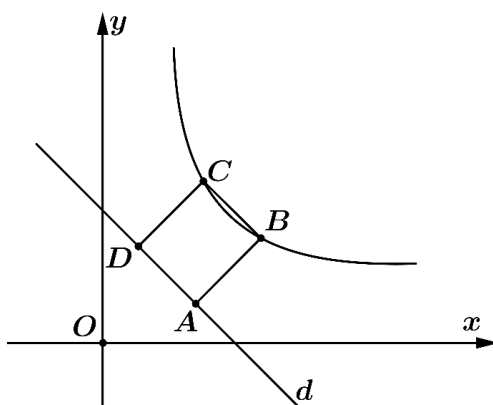
$$-x + \frac{21}{2} - \frac{4}{x-2} = 0 \Rightarrow -x^2 + \frac{25}{2}x - 25 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x = 10 \end{cases} \Rightarrow C(10; 0) \text{ suy ra } CG = \frac{21}{2} - 10 = \frac{1}{2}.$$

. Khi đó giá trị cực tiểu là $y(2) = -3$.

Câu 18: Trong một công viên có một hồ nước và một đường đi lát gạch hoa. Thiết lập hệ trục Oxy như hình vẽ dưới, kiến trúc sư thấy rằng bờ hồ có thể coi như một nhánh của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ và đường đi khi đó ứng với đường thẳng $(d): y = -x + 4$. Để đảm bảo ánh sáng, kiến trúc sư



muốn đặt 2 cột đèn trên bờ hồ và 2 cột đèn trên đường đi sao cho 4 cột đèn này tạo thành một hình vuông. Tính khoảng cách giữa hai cột đèn trên bờ hồ (làm tròn đến hàng phần trăm)



Trả lời:

1	,	9	2
---	---	---	---

Lời giải

Gọi $(d_1): y = -x + m$ (với $m > 4$) song song với $(d): y = -x + 4$ và cắt $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt B, C ($x_B, x_C > 1$)

Phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và $(C): \frac{2x+1}{x-1} = -x + m \Leftrightarrow x^2 + (1-m)x + m+1 = 0$.

$$\Delta = m^2 - 6m - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 + 2\sqrt{3} \\ m < 3 - 2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow m > 3 + 2\sqrt{3} \text{ (vì } m > 4 \text{)} \quad (1)$$

Khi đó ta có:
$$\begin{cases} x_C + x_B = m - 1 \\ x_C \cdot x_B = m + 1 \end{cases}$$

Suy ra:
$$CB = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (-x_B + m + x_C - m)^2} = \sqrt{2(x_B - x_C)^2}$$

$$\Rightarrow CB^2 = 2(x_B - x_C)^2 = 2(x_B + x_C)^2 - 8x_B \cdot x_C = 2m^2 - 12m - 6$$

Mặt khác chọn $I(0;4) \in (d)$, ta có khoảng cách giữa hai đường thẳng $(d); (d_1)$ bằng

$$AB = d(I; (d_1)) = \frac{|4 - m|}{\sqrt{2}} = \frac{m - 4}{\sqrt{2}}$$

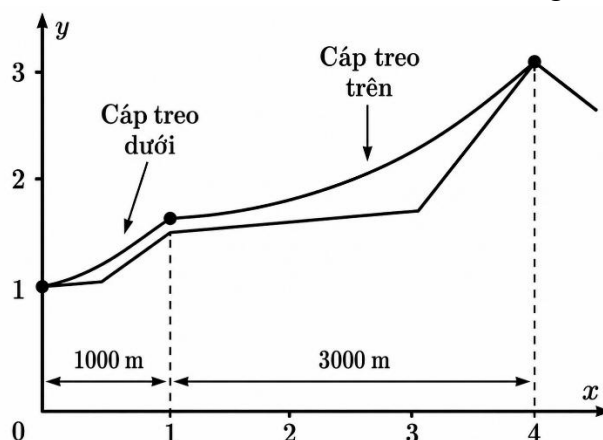
Để $ABCD$ là hình vuông thì $AB^2 = BC^2 \Leftrightarrow \frac{(m-4)^2}{2} = 2m^2 - 12m - 6 \Leftrightarrow m = \frac{8 \pm 2\sqrt{37}}{3}$

Kết hợp điều kiện (1) suy ra $m = \frac{8 + 2\sqrt{37}}{3}$

Vậy khoảng cách giữa hai cột đèn bên bờ hồ bằng $\frac{\frac{8 + 2\sqrt{37}}{3} - 4}{\sqrt{2}} \approx 1,92$.



Câu 19: Một tuyến cáp treo trên núi chạy từ ga dưới của thung lũng đến một cột trụ, từ đó đến ga trên của đỉnh núi. Đoạn dưới dài 1km theo phương ngang, đoạn trên dài 3 km. Hình vẽ biểu diễn sơ đồ đường đi của cáp treo cũng như mặt cắt ngang bên dưới của ngọn núi. Trong hệ tọa độ được sử dụng, trục Ox biểu thị khoảng cách theo phương ngang từ ga dưới và trục Oy biểu thị độ cao so với mực nước biển. Mỗi đơn vị trên hệ trục tọa độ dài 1 km trong thực tế.



Trong đoạn dưới, đường đi của cáp treo được mô tả bởi hàm số

$$f(x) = 0,34x^2 + 0,15x + 1,16, \forall x \in [0;1].$$

Trong đoạn trên, đường đi của cáp treo được mô tả bởi hàm số

$$g(x) = ax^2 + bx + c, \forall x \in [1;4] \text{ với } a, b, c \in \mathbb{R}$$

Độ dốc lớn nhất của đường đi cáp treo ở đoạn trên là 1,1. Cáp treo ở ga trên có độ cao 3150 m so với mực nước biển. Độ cao của ngọn núi được mô hình hóa cho khu vực $1 \leq x \leq 3$ bằng hàm số $h(x) = 0,1x + 1,43$. Đối với độ cao này thì khoảng cách theo phương thẳng đứng nhỏ nhất giữa cáp treo và ngọn núi bằng bao nhiêu theo đơn vị mét.

Trả lời:

7	0		
---	---	--	--

Lời giải

Điểm bắt đầu của cáp treo dưới là $C(1;1,65)$ và của cáp treo trên là $D(4;3,15)$

Độ dốc là $g'(x) = 2ax + b$ và vì $a > 0$ nên hàm số $g'(x)$ đồng biến

Ta có: $g'(4) = 1,1 \Leftrightarrow 8a + b = 1,1$

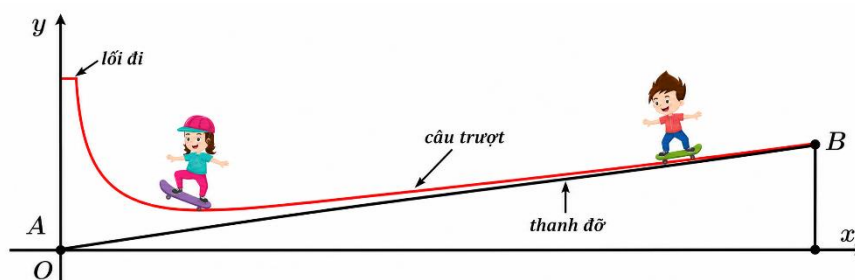
$$\text{Mặt khác } \begin{cases} g(1) = 1,65 \\ g(4) = 3,15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 1,65 \\ 16a + 4b + c = 3,15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{39}{20} \end{cases} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{39}{20}$$

Do vậy, khoảng cách theo phương thẳng đứng đứng nhỏ nhất là $d_{\min} = \min_{[1;3]} (g(x) - h(x))$

$$= \min_{[1;3]} \left(\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{39}{20} - 0,1x - 1,43 \right) \geq 0,07 = 70$$



Câu 20: Tại một công viên, người ta thiết kế một cầu trượt, xét mặt phẳng Oxy với trục Ox ở mặt đất, mỗi đơn vị dài 1 m thì cầu trượt là một phần của đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 1}$ ($a \neq 0$) với chiều dài theo phương nằm ngang là 71m. Ở điểm đầu của cầu trượt có một lối đi song song với Ox , xuất phát từ 1 điểm thuộc Oy , dài 2 m và cao 19,2 m. Để gia cố chắc chắn cho cầu trượt, người ta dùng một thanh đỡ AB với $A(0;1)$ và đường thẳng AB là tiệm cận xiên của đồ thị. Tại điểm cuối của cầu trượt nó cách đầu B của thanh đỡ là 0,25 m. Hỏi điểm thấp nhất của cầu trượt cao bao nhiêu mét? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



Trả lời:

3	,	7	8
---	---	---	---

Lời giải

Đầu của cầu trượt tại vị trí gần lối đi là $C(2;19,2)$

Đường thẳng AB là tiệm cận xiên có hệ số góc là k nên ta có phương trình là $y = kx + 1$

Cầu trượt có phương trình là: $y = kx + 1 + \frac{\alpha}{x - 1}$ và nó đi qua $C(2;19,2)$

$$\text{Mặt khác: } y_D - y_B = \left(k \cdot 71 + 1 + \frac{\alpha}{71 - 1} \right) - (k \cdot 71 + 1) = 0,25$$

$$\text{Từ đó ta có: } \begin{cases} k \cdot 2 + 1 + \frac{\alpha}{2 - 1} = 19,2 \\ \left(k \cdot 71 + 1 + \frac{\alpha}{71 - 1} \right) - (k \cdot 71 + 1) = 0,25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 18 \\ k = \frac{1}{10} \end{cases}$$

$$\text{Phương trình của cầu trượt là } y = \frac{1}{10}x + 1 + \frac{18}{x - 1} \text{ có } y' = \frac{(x - 1)^2 - 180}{10(x - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{180}$$

$$\text{Vậy điểm thấp nhất của cầu trượt cao: } y(1 + \sqrt{180}) \approx 3,78 \text{ m}$$

----- **HẾT** -----

**ĐỀ RÈN LUYỆN 06: KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ**

Chuyên đề tính đơn điệu của hàm số gồm lý thuyết và ví dụ minh họa

Sưu tầm và biên soạn: Phan Nhật Linh

KẾT NỐI TRI THỨC

Tài liệu khóa học luyện thi THPT Quốc Gia theo chương trình mới

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Bảng biến thiên dưới đây là của hàm số nào trong các hàm số sau?

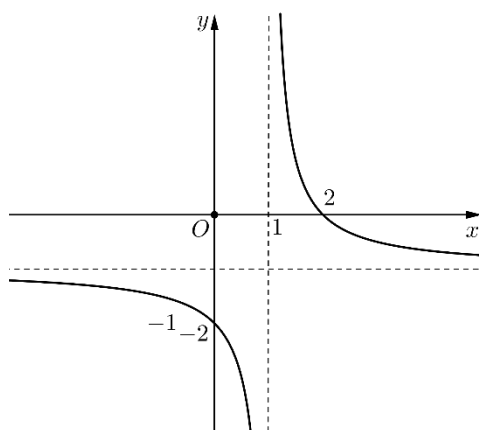
x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

- A.** $y = -x^3 + 3x^2 - 3$. **B.** $y = x^3 + 3x^2 - 1$. **C.** $y = x^3 - 3x + 2$. **D.** $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Lời giải

Ta có: $a = 1 > 0$; $y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ x = 2 \Rightarrow y = -2 \end{cases}$

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx-1}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Giá trị của tổng $S = a + b + c$ bằng:



- A.** $S = 0$. **B.** $S = -2$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = 4$.

Lời giải

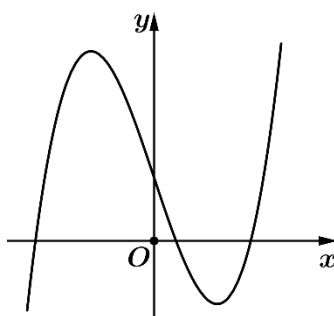
Tiệm cận ngang: $y = \frac{a}{c} = -1$; tiệm cận đứng: $x = \frac{1}{c} = 1$

Từ đây suy ra: $\begin{cases} a = -1 \\ c = 1 \end{cases}$ mà đồ thị lại cắt trục hoành tại $x = 2$ nên $2a + b = 0$ hay $b = -2a = 2$.

Vậy $S = a + b + c = -1 + 2 + 1 = 2$.



Câu 3: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



- A.** $y = x^3 - 3x - 1$. **B.** $y = x^3 - 3x^2 + 1$. **C.** $y = -x^3 + 3x + 1$. **D.** $y = x^3 - 3x + 1$.

Lời giải

Từ dáng điệu đồ thị suy ra hệ số $a > 0$

Giao điểm của đồ thị với trục Oy có tung độ dương

Từ đồ thị ta thấy, hoành độ hai điểm cực trị trái dấu

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax-6}{bx-c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	—		—
$f(x)$	1	$+\infty$	1

Trong các số a, b, c có bao nhiêu số âm?

- A.** 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 0

Lời giải

Từ bảng biến thiên của hàm số, ta thấy đồ thị có hai đường tiệm cận, trong đó tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \frac{c}{b} = -2 \\ \frac{a}{b} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bc < 0 \\ ab > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0, c < 0, a > 0 & (1) \\ b < 0, c > 0, a < 0 & (2) \end{cases}$$

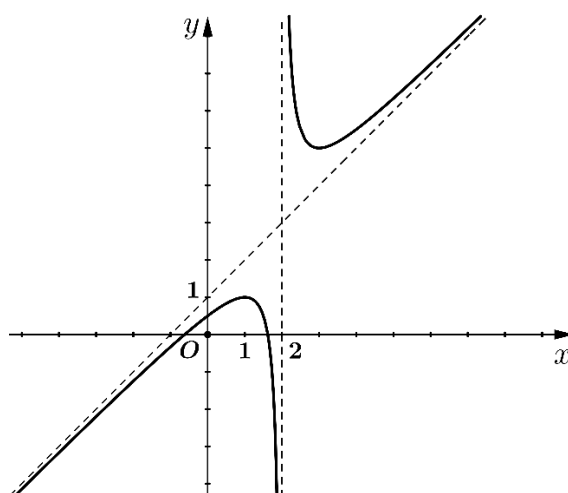
Lại có hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định $f'(x) = \frac{-ac+6b}{(bx-c)^2} < 0 \Rightarrow ac > 6b$.

Ta thấy (1) không thể xảy ra do nếu $b > 0$ thì $ac > 6b > 0$

Ta thấy (2) có thể xảy ra do nếu $c > 0, a < 0$ thì $6b < ac < 0$.

Vậy trong các số a, b, c có hai số âm.

Câu 5: Đồ thị ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào trong các hàm số sau?

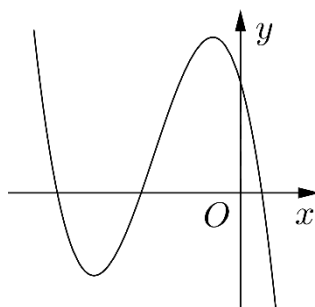


A. $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$

B. $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 2}$

C. $y = \frac{x^2 - 2x - 1}{x - 2}$

D. $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 2}$

Lời giảiHàm số đó là $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$.**Câu 6:** Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?**A.** 4.**B.** 2.**C.** 1.**D.** 3.**Lời giải**Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.Dựa vào đồ thị ta thấy: $a < 0$

$$\text{Hàm số có 2 cực trị âm nên } \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 9ac > 0 \\ -\frac{2b}{3a} < 0 \\ \frac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b < 0 \\ c < 0 \end{cases}$$

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $(0; d)$ nên $d > 0$.Vậy có đúng một số dương trong các số a, b, c, d .**Câu 7:** Trong các hàm số sau, hàm số nào có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:



x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	+		+
y	-1	$+\infty$	$-\infty$

A. $y = \frac{x+1}{x-2}$.

B. $y = \frac{x+3}{x-2}$.

C. $y = \frac{x-1}{x-2}$.

D. $y = \frac{x-3}{x-2}$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Câu 8: Một bể chứa ban đầu có 100 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 20 lít nước, đồng thời cho vào bể 10 gam chất khử trùng (hoà tan). Hàm số $f(t)$ thể hiện nồng độ chất khử trùng (gam/lít) trong bể sau t phút là:

A. $f(t) = \frac{20t+100}{10t}$.

B. $f(t) = 20t + 100$.

C. $f(t) = \frac{10t}{20t+100}$.

D. $f(t) = 20,02t + 100$

Lời giải

Hàm số $f(t)$ thể hiện nồng độ chất khử trùng (gam/lít) trong bể sau t phút là

$$f(t) = \frac{20t}{40t+200} = \frac{t}{2t+10}$$

Câu 9: Hồ nuôi tôm giống của một anh nông dân chứa 30 khối nước, cứ mỗi giờ máy bơm nước sẽ bơm thêm vào hồ 4 khối nước, đồng thời anh ta cũng thêm vào 3 kg bột xử lý nước. Nồng độ (kg/khối) của bột xử lý nước trong hồ không bao giờ vượt qua

A. 12 (kg/khối).

B. 1,33 (kg/khối).

C. 0,75 (kg/khối).

D. 0,75 (kg/khối).

Lời giải

Số khối nước tại thời điểm t là $4t + 30$

Số kg bột có được tại thời điểm t là $3t$

Nồng độ bột xử lý nước có trong hồ tại thời điểm t là $f(t) = \frac{3t}{4t+30}$ với $t \geq 0$.

Khảo sát hàm số $f(t) = \frac{3t}{4t+30}$ có đạo hàm $f'(t) = \frac{90}{(4t+30)^2}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Khi đó $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{3t}{4t+30} = \frac{3}{4} = 0,75$

Câu 10: Giả sử hàm nhu cầu đối với một loại hàng hóa được cho bởi công thức $p = \frac{60}{1+0,2x}$, $12 > x \geq 0$, trong đó p là giá bán (nghìn đồng) của mỗi đơn vị sản phẩm và x là số lượng đơn vị sản phẩm đã bán. Để bán được 10 đơn vị sản phẩm thì giá bán là bao nhiêu nghìn đồng?



A. 15.

B. 18.

C. 19.

D. 20.

Lời giải

Với $x = 10 \Rightarrow p = \frac{60}{1 + 0,2 \cdot 10} = 20$ (nghìn đồng).

Câu 11: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+1}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	2	$+\infty$	2

Tập các giá trị b là tập nghiệm của bất phương trình nào dưới đây?

A. $b^3 - 8 \leq 0$.B. $-b^2 + 4 > 0$.C. $b^2 - 3b + 2 < 0$.D. $b^3 - 8 < 0$.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+1}$ có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -\frac{1}{c}$ và đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{a}{c}$.

Nhìn vào bảng biến thiên, ta thấy $-\frac{1}{c} = -1 \Rightarrow c = 1$ và $\frac{a}{c} = 2 \Rightarrow a = 2$ (vì $c = 1$).

Ta có $y' = \frac{a-bc}{(cx+1)^2}$.

Vì hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$ nên

$$y' = \frac{a-bc}{(bx+c)^2} > 0 \Leftrightarrow a-bc > 0 \Leftrightarrow 2-b > 0 \Leftrightarrow b < 2 \Leftrightarrow b^3 < 8 \Leftrightarrow b^3 - 8 < 0.$$

Vậy tập các giá trị b là tập nghiệm của bất phương trình $b^3 - 8 < 0$.

Câu 12: Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được cho bởi công thức $c(t) = \frac{t}{t^2+1}$ (mg/L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

A. 4 giờ.

B. 1 giờ.

C. 3 giờ.

D. 2 giờ.

Lời giải

Xét hàm số $c(t) = \frac{t}{t^2+1}$ ($t > 0$) có $c'(t) = \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}$ và $c'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \in (0; +\infty) \\ t = -1 \notin (0; +\infty) \end{cases}$.

Bảng biến thiên:



t	0	1	$+\infty$	
$c'(t)$		+	0	-
$c(t)$	0	$\nearrow \frac{1}{2}$	$\searrow 0$	

Với $t = 1$ giờ thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 20$

- Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 20
- Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1) \cap (5; +\infty)$
- Điểm uốn của đồ thị hàm số có tọa độ $I(2; -26)$
- Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(-4; +\infty)$ bằng -80

Lời giải

- Đúng: Thay $x = 0$ suy ra $f(0) = 20$
- Sai: Hàm số phải đồng biến trên một miền liên tục
- Đúng: $x_t = \frac{-b}{3a} = \frac{-(-6)}{3 \cdot 1} = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow y_t = f(x_t) = f(2) = -26$ suy ra $I(2; -26)$
- Đúng: Ta có $f'(x) = 3x^2 - 12x - 15 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 5 \end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số trên khoảng $(-4; +\infty)$:

x	-4	-1	5	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 20$	$\searrow -80$	$\nearrow +\infty$	

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(-4; +\infty)$ bằng -80 .

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{3x+2}{x+2}$ có đồ thị là (C)

- Đường thẳng $y = 3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (C) .
- Điểm $I(-2; 3)$ là giao điểm của các đường tiệm cận của đồ thị (C) .



- c) Đồ thị (C) cắt đường thẳng $y = x + 2$ tại hai điểm phân biệt
 d) Đường thẳng $y = x$ cắt (C) tại hai điểm A, B . Biết đường thẳng $y = x + k$ cắt (C) tại C, D thì $ABCD$ là hình bình hành khi đó $k > 5$

Lời giải

- a) Sai: Đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (C) .
 b) Đúng: Điểm $I(-2; 3)$ là giao điểm của các đường tiệm cận của đồ thị (C) .
 c) Đúng: Đồ thị (C) cắt đường thẳng $y = x + 2$ tại hai điểm phân biệt
 d) Đúng: Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng $y = x$

$$\frac{3x+2}{x+2} = x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 2 \Rightarrow A(-1; -1), B(2; 2)$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng $y = x + m$

$$\frac{3x+2}{x+2} = x + m \Leftrightarrow x^2 + (m-1)x + 2m-2 = 0 \quad (1)$$

Đường thẳng $y = x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt $C, D \Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác $-2 \Leftrightarrow (m-1)(m-9) > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; 1) \cup (9; +\infty)$

Khi đó: $C(x_1; x_1 + m), D(x_2; x_2 + m), ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{DC}$

$$\Leftrightarrow x_2 - x_1 = 3 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = 3 \Leftrightarrow \Delta = 9 \Leftrightarrow m^2 - 10m + 9 = 9 \Leftrightarrow m = 0, m = 10$$

Kiểm tra thấy $m = 10$ là giá trị cần tìm.

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{-x^2 - 3x + 4}{x - 3}$ có đồ thị là (C) . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên là $y = -x - 6$.
 b) Đồ thị (C) nhận giao điểm $I(3; -9)$ làm tâm đối xứng.
 c) Đồ thị (C) có hai điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy .
 d) Đồ thị không cắt trục Ox .

Lời giải

a) Đúng: Ta có $y = -x - 6 - \frac{14}{x-3}$. Khi đó tiệm cận xiên là $y = -x - 6$.

b) Đúng: Phương trình đường tiệm cận đứng là $x = 3$.

Suy ra giao điểm 2 tiệm cận là $I(3, -9)$ là tâm đối xứng.

c) Đúng: $y' = \frac{-x + 6x + 5}{(x-3)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 5 = 0 \quad (*)$



Phương trình (*) luôn có 2 nghiệm $x_1 < 0 < x_2$ nên (C) luôn có 2 điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy .

d) Sai: $y = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 3x + 4 = 0$ và phương trình luôn có 2 nghiệm suy ra (C) cắt Ox tại hai điểm phân biệt.

Câu 4: Chi phí nhiên liệu của một chiếc tàu chạy trên sông được chia làm hai phần. Phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 nghìn đồng trên 1 giờ. Phần thứ hai tỉ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi $v = 10$ (km/giờ) thì phần thứ hai bằng 30 nghìn đồng/giờ.

a) Khi vận tốc $v = 10$ (km/giờ) thì chi phí nguyên liệu cho phần thứ nhất trên 1 km đường sông là 48000 đồng.

b) Hàm số xác định tổng chi phí nguyên liệu trên 1km đường sông với vận tốc x (km/h) là $f(x) = \frac{480}{x} + 0,03x^3$.

c) Khi vận tốc $v = 30$ (km/giờ) thì tổng chi phí nguyên liệu trên 1km đường sông là 43000 đồng.

d) Vận tốc của tàu để tổng chi phí nguyên liệu trên 1km đường sông nhỏ nhất là $v = 20$ (km/giờ).

Lời giải

a) Đúng: Thời gian tàu chạy quãng đường 1km là: $\frac{1}{10}$ (giờ)

Chi phí tiền nhiên liệu cho phần thứ nhất là: $\frac{1}{10} \cdot 480000 = 48000$. (đồng).

b) Sai: Gọi x (km/h) là vận tốc của tàu với $x > 0$

Thời gian tàu chạy quãng đường 1km là: $\frac{1}{x}$ (giờ)

Chi phí tiền nhiên liệu cho phần thứ nhất là: $\frac{1}{x} \cdot 480 = \frac{480}{x}$ (ngàn đồng)

Hàm chi phí cho phần thứ hai là $p = kx^3$ (ngàn đồng/ giờ)

Mà khi $x = 10 \Rightarrow p = 30 \Rightarrow k = 0,03$ nên $p = 0,03x^3$ (ngàn đồng/ giờ)

Do đó chi phí phần 2 để chạy 1km là: $\frac{1}{x} \cdot 0,03x^3 = 0,03x^2$ ngàn đồng)

Vậy tổng chi phí: $f(x) = \frac{480}{x} + 0,03x^2$.

c) Đúng: Tổng chi phí: $f(x) = \frac{480}{x} + 0,03x^2$.

Thay $x = v = 30$ (km/giờ) vào ta có $f(30) = \frac{480}{30} + 0,03 \cdot 30^2 = 43$ (ngàn đồng).

d) Đúng: $f(x) = \frac{480}{x} + 0,03x^2 = \frac{240}{x} + \frac{240}{x} + 0,03x^2 \geq 3\sqrt[3]{1728} = 36$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = 20$.



PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Khi máu di chuyển từ tim qua các động mạch chính rồi đến các mao mạch và quay trở lại qua các tĩnh mạch, huyết áp tâm thu (tức là áp lực của máu lên động mạch khi tim co bóp) liên tục giảm xuống. Giả sử một người có huyết áp tâm thu P (được tính bằng mmHg) được cho bởi hàm số: $P(t) = \frac{25t^2 + 125}{t^2 + 1}, 0 \leq t \leq 10$. Trong đó t là thời gian được tính bằng giây. Tốc độ thay đổi của huyết áp sau 8 giây kể từ khi máu rời tim giảm bao nhiêu mmHg?

Trả lời:

0	,	3	8
---	---	---	---

Lời giải

Tốc độ thay đổi của huyết áp sau t giây là:
$$P'(t) = \frac{50t \cdot (t^2 + 1) - (25t^2 + 125) \cdot 2t}{(t^2 + 1)^2} = \frac{-200t}{(t^2 + 1)^2} \leq 0, \forall 0 \leq t \leq 10$$

 $\Rightarrow P(t)$ nghịch biến trên đoạn $[0;10]$ và ta có $P'(8) = \frac{-200 \cdot 8}{(8^2 + 1)} = \frac{-64}{169}$
Tốc độ thay đổi của huyết áp sau 8 giây kể từ khi máu rời tim là giảm $\frac{64}{169} \approx 0,38$ (mmHg).

Câu 2: Nếu trong một ngày, một xưởng sản xuất được x chiếc vợt cầu lông thì chi phí trung bình (tính bằng nghìn đồng) cho một chiếc vợt cầu lông được cho bởi công thức $C(x) = \frac{5x + 1}{x}$. Xét trong một khoảng thời gian dài, xưởng sản xuất đã sản xuất được “rất nhiều” chiếc vợt cầu lông. Vậy cho đến nay, chi phí sản xuất mỗi chiếc vợt cầu lông là bao nhiêu nghìn đồng?



Trả lời:

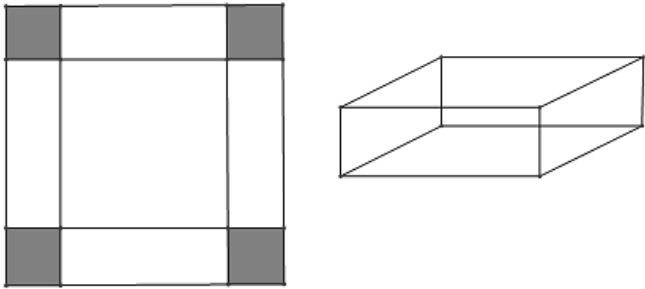
5			
---	--	--	--

Lời giải

Chi phí sản xuất mỗi chiếc vợt cầu lông là: $\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x + 1}{x} \right) = 5$.
Vậy cho đến nay, chi phí sản xuất mỗi chiếc vợt cầu lông là 5 nghìn đồng



Câu 3: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



Trả lời:

2			
---	--	--	--

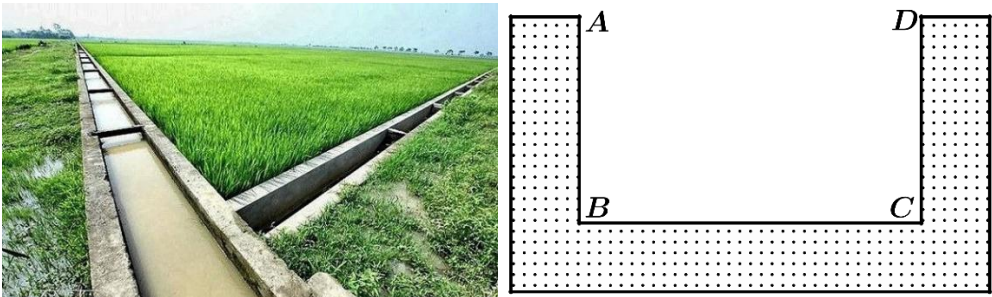
Lời giải

Ta có $h = x$ (cm) là đường cao hình hộp
 Vì tấm nhôm được gấp lại tạo thành hình hộp nên cạnh đáy của hình hộp là $12 - 2x$ (cm)
 Ta có $\begin{cases} x > 0 \\ 12 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 6)$
 Thể tích của hình hộp là: $V = x(12 - 2x)^2$. Xét hàm số $y = x(12 - 2x)^2, x \in (0; 6)$
 Ta có $y' = (12 - 2x)^2 - 4x(12 - 2x) = (12 - 2x)(12 - 6x)$
 Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow (12 - 2x)(12 - 6x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 6 \end{cases}$ ta nhận $x = 2$.

x	0	2	6
y'	+	0	-
y			

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số là $y(2) = 128$. Vậy $x = 2$ (cm) thì thể tích hộp là lớn nhất.

Câu 4: Hình dưới đây là mương dẫn nước thủy lợi tại một địa phương phục vụ tưới tiêu cho ruộng đồng. Phần không gian trong mương để nước chảy có mặt cắt ngang là hình chữ nhật $ABCD$. Với điều kiện lưu lượng nước qua mương cho phép thì diện tích mặt cắt $ABCD$ là $0,48\text{m}^2$. Để đảm bảo yêu cầu kỹ thuật tốt nhất cho mương, người ta cần thiết kế sao cho tổng độ dài $T = AB + BC + CD$ là ngắn nhất. Khi đó chiều rộng đáy mương bằng bao nhiêu (biết chiều rộng phải dưới 1m, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Trả lời:

0	,	9	8
---	---	---	---

Lời giải

Đặt $BC = x(m)$ với $0 < x < 1$.

Theo đề bài ta có : $AB \cdot BC = 0,48 \Rightarrow AB = \frac{0,48}{BC} = \frac{0,48}{x}$.

Xét hàm số $T = f(x) = AB + BC + CD = x + 2 \cdot AB = x + \frac{0,96}{x}$.

Đạo hàm $f'(x) = 1 - \frac{0,96}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 0,96 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{6}}{5} \approx 0,98(m)$.

x	0	$\frac{2\sqrt{6}}{5}$	1	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$+\infty$		$\frac{4\sqrt{6}}{5}$	$\frac{49}{25}$

Vậy chiều rộng đáy mương $BC = 0,98$ m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5: Một cốc chứa 25 ml dung dịch NaOH với nồng độ 100 mg/ml. Một bình chứa dung dịch NaOH khác với nồng độ 9 mg/ml được trộn vào cốc. Gọi $C(x)$ là nồng độ của NaOH sau khi trộn x (ml) từ bình chứa, ta thấy nồng độ của NaOH trong cốc sẽ luôn giảm theo x nhưng luôn lớn hơn một số a . Tính a ?

Trả lời:

9			
---	--	--	--

Lời giải

Tổng khối lượng của NaOH sau khi trộn x (ml) là: $25 \cdot 100 + 9x = 2500 + 9x$ (mg)

Tổng thể tích của dung dịch sau khi trộn là: $25 + x \Rightarrow C(x) = \frac{2500 + 9x}{25 + x}$ với $x \geq 0$

Tập xác định là $D = [0; +\infty)$ có $C'(x) = \frac{9 \cdot (25 + x) - (2500 + 9x)}{(25 + x)^2} = \frac{-2275}{(25 + x)^2} < 0, \forall x \in D$

Lại có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2500 + 9x}{25 + x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2500}{x} + 9}{\frac{25}{x} + 1} = 9$

Do đó nồng độ NaOH luôn giảm nhưng luôn lớn hơn 9 mg/ml.

Câu 6: Trong tiết học Toán, giáo viên phát cho 4 tổ một tấm bìa hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 10 cm. Giáo viên yêu cầu 4 tổ sử dụng tấm bìa này và cắt tấm bìa theo các tam giác cân AEB, BFC, CGD, DHA để sau đó gấp các tam giác AEH, BEF, CFG, DGH sao cho bốn đỉnh A, B, C, D

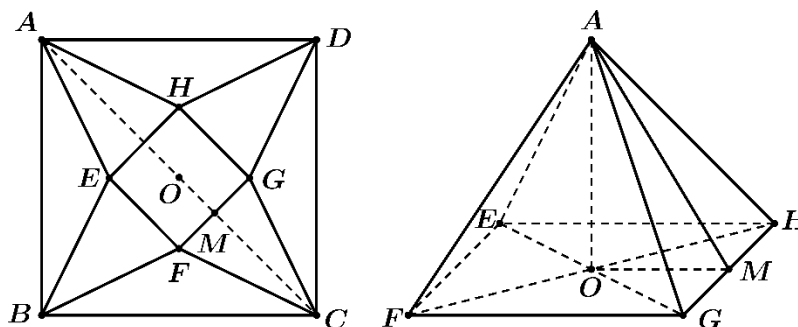


trùng nhau tạo thành khối chóp tứ giác đều. Khi đó thể tích lớn nhất của khối chóp tứ giác đều tạo thành bằng là $\frac{a\sqrt{b}}{c} \text{ (cm}^3\text{)}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P = a + b + c$

Trả lời:

4	5		
---	---	--	--

Lời giải



Đặt cạnh hình vuông $EFGH$ là $x (x > 0)$. O là tâm hình vuông $ABCD, EFGH$.

Khi đó $OM = \frac{x}{2}$, $CM = CO - OM = \frac{10\sqrt{2} - x}{2} (0 < x < 10\sqrt{2})$.

Khi gò các tam giác thành hình chóp tứ giác đều $A.EFGH$ thì $A \equiv C$ nên $AM = CM$. Suy ra $AO = \sqrt{AM^2 - OM^2} = \sqrt{50 - 5\sqrt{2}x}$.

Thể tích khối chóp $A.EFGH$ là $V_{A.EFGH} = \frac{1}{3} S_{EFGH} \cdot AO = \frac{1}{3} x^2 \sqrt{50 - 5\sqrt{2}x} = \frac{1}{3} \sqrt{50x^4 - 5\sqrt{2}x^5}$.

Xét hàm số $f(x) = 50x^4 - 5\sqrt{2}x^5$ với $0 < x < 5\sqrt{2}$ ta tìm được $\max f(x) = \frac{32\sqrt{10}}{3}$ khi $x = 4\sqrt{2}$

Vậy $a + b + c = 32 + 10 + 3 = 45$.

----- HẾT -----

**BUỔI 07: ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM GIẢI QUYẾT THỰC TIỄN**

Chuyên đề tính đơn điệu của hàm số gồm lý thuyết và ví dụ minh họa

Sưu tầm và biên soạn: Phan Nhật Linh

KẾT NỐI TRI THỨC

Tài liệu khóa học luyện thi THPT Quốc Gia theo chương trình mới

A // LÝ THUYẾT CẦN NHỚ**1. Tốc độ thay đổi của các đại lượng**

Ta có đạo hàm $f'(a)$ là tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng $y = f(x)$ đối với x tại điểm $x = a$. Dưới đây, chúng ta xem xét một số ứng dụng của ý tưởng này đối với vật lí, hoá học, sinh học và kinh tế:

- Nếu $s = s(t)$ là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì $v = s'(t)$ biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian). Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là gia tốc tức thời của vật:

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

- Nếu $C = C(t)$ là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm t , thì $C'(t)$ là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm t .
- Nếu $P = P(t)$ là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t , thì $P'(t)$ biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm t .
- Nếu $C = C(x)$ là hàm chi phí, tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì tốc độ thay đổi tức thời $C'(x)$ của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là chi phí biên.
- Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên $C'(x)$ xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo, tức là đơn vị hàng hoá thứ $x+1$ (xem SGK Toán 11 tập hai, trang 87, bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống).

2. Một số bài toán tối ưu hóa đơn giản

Một trong những ứng dụng phổ biến nhất của đạo hàm là cung cấp một phương pháp tổng quát, hiệu quả để giải những bài toán tối ưu hoá. Trong mục này, chúng ta sẽ giải quyết những vấn đề thường gặp như tối đa hoá diện tích, khối lượng, lợi nhuận, cũng như tối thiểu hoá khoảng cách, thời gian, chi phí.

Khi giải những bài toán như vậy, khó khăn lớn nhất thường là việc chuyển đổi bài toán thực tế cho bằng lời thành bài toán tối ưu hoá toán học bằng cách thiết lập một hàm số phù hợp mà ta cần tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của nó, trên miền biến thiên phù hợp của biến số.

Quy trình giải một bài toán tối ưu hoá:

- **Bước 1:** Xác định đại lượng Q mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.
- **Bước 2:** Chọn một đại lượng thích hợp nào đó, kí hiệu là x , và biểu diễn các đại lượng khác ở Bước 1 theo x . Khi đó, đại lượng Q sẽ là hàm số của một biến x . Tìm tập xác định của hàm số $Q = Q(x)$.
- **Bước 3:** Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $Q = Q(x)$ bằng các phương pháp đã biết và kết luận.

**B VÍ DỤ MINH HỌA**

Câu 1: Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao (mét) của một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất 2 m với vận tốc ban đầu 24,5 m/s là $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$ (theo Vật lý Đại Cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016).

- Tìm vận tốc của vật sau 2 giây.
- Khi nào vật đạt độ cao lớn nhất và độ cao lớn nhất đó là bao nhiêu?
- Khi nào thì vật chạm đất và vận tốc của vật lúc chạm đất là bao nhiêu?

Lời giải

a) Theo ý nghĩa cơ học của đạo hàm, vận tốc của vật là $v = h'(t) = 24,5 - 9,8t$ (m/s).

Do đó, vận tốc của vật sau 2 giây là $v(2) = 24,5 - 9,8 \cdot 2 = 4,9$ (m/s).

b) Vì $h(t)$ là hàm số bậc hai có hệ số $a = -4,9 < 0$ nên $h(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại

$$t = -\frac{b}{2a} = \frac{24,5}{2 \cdot 4,9} = 2,5 \text{ (giây)}. \text{ Khi đó, độ cao lớn nhất của vật là } h(2,5) = 32,625 \text{ (m)}.$$

c) Vật chạm đất khi độ cao bằng 0, tức là $h = 2 + 24,5t - 4,9t^2 = 0$ hay $t \approx 5,08$ (giây).

Vận tốc của vật lúc chạm đất là $v((5,08)24,5 - 9,8 \cdot 5,08 = -25,284$ (m/s).

Vận tốc âm chứng tỏ chiều chuyển động của vật là ngược chiều dương (hướng lên trên) của trục đã chọn (khi lập phương trình chuyển động của vật).

Câu 2: Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số $P(t) = \frac{a}{b + e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t = 0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Tìm các giá trị của a và b . Theo mô hình này, điều gì xảy ra với quần thể nấm men về lâu dài?

Lời giải

Ta có: $P'(t) = \frac{0,75ae^{-0,75t}}{(b + e^{-0,75t})^2}, t \geq 0$. Theo đề bài, ta có: $P(0) = 20$ và $P'(0) = 12$.

$$\text{Do đó, ta có hệ phương trình: } \begin{cases} \frac{a}{b+1} = 20 \\ \frac{0,75a}{(b+1)^2} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 20(b+1) \\ \frac{15}{b+1} = 12. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta được $a = 25$ và $b = \frac{1}{4}$.

Khi đó, $P'(t) = \frac{18,75e^{-0,75t}}{\left(\frac{1}{4} + e^{-0,75t}\right)^2} > 0, \forall t \geq 0$, tức là số lượng quần thể nấm men luôn tăng.



Tuy nhiên, do $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25}{\frac{1}{4} + e^{-0.75t}} = 100$ nên số lượng quần thể nấm men tăng nhưng

không vượt quá 100 tế bào.

Câu 3: Giả sử chi phí $C(x)$ (nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị của một loại hàng hoá nào đó được cho bởi hàm số $C(x) = 30000 + 300x - 2,5x^2 + 0,125x^3$.

- Tìm hàm chi phí biên.
- Tìm $C'(200)$ và giải thích ý nghĩa.
- So sánh $C'(200)$ với chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201.

Lời giải

- Hàm chi phí biên là $C'(x) = 300 - 5x + 0,375x^2$.
- Ta có: $C'(200) = 300 - 5 \cdot 200 + 0,375 \cdot 200^2 = 14300$.

Chi phí biên tại $x = 200$ là 14300 nghìn đồng, nghĩa là chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo (đơn vị hàng hoá thứ 201) là khoảng 14300 nghìn đồng.

- Chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201 là

$$C(201) - C(200) = 1004372,625 - 990000 = 14372,625 \text{ (nghìn đồng)}$$

Giá trị này xấp xỉ với chi phí biên $C'(200)$ đã tính ở câu trên.

Câu 4: Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là $C(x) = \frac{300x}{100-x}$, $0 \leq x < 100$ (triệu đồng). Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = C(x)$. Từ đó, hãy cho biết:

- Chi phí cần bỏ ra sẽ thay đổi như thế nào khi x tăng?
- Có thể loại bỏ được 100% chất gây ô nhiễm không khí không? Vì sao?

Lời giải

Xét hàm số $y = C(x) = \frac{300x}{100-x}$, $0 \leq x < 100$.

Ta có: $y' = \frac{30000}{(100-x)^2} > 0$, với mọi $x \in [0; 100)$.

Do đó hàm số luôn đồng biến trên nửa khoảng $[0; 100)$ và $\lim_{x \rightarrow 100^-} C(x) = \lim_{x \rightarrow 100^-} \frac{300x}{100-x} = +\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 100$.

Bảng biến thiên:



x	0	100
$C'(x)$		+
$C(x)$	0	$+\infty$

- a) Chi phí cần bỏ ra $C(x)$ sẽ luôn tăng khi x tăng.
- b) Vì $\lim_{x \rightarrow 100^-} C(x) = +\infty$ (hàm số $C(x)$ không xác định khi $x = 100$) nên nhà máy không thể loại bỏ 100% chất gây ô nhiễm không khí (dù bỏ ra chi phí là bao nhiêu đi chăng nữa).

Câu 5: Xét phản ứng hoá học tạo ra chất C từ hai chất A và B : $A + B \longrightarrow C$. Giả sử nồng độ của hai chất A và B bằng nhau $[A] = [B] = a$ (mol/l). Khi đó nồng độ của chất C theo thời gian t

($t > 0$) được cho bởi công thức: $[C] = \frac{a^2 K t}{a K t + 1}$ (mol/l) trong đó K là hằng số dương.

- a) Tìm tốc độ phản ứng tại thời điểm $t > 0$.
- b) Chứng minh nếu $x = [C]$ thì $x'(t) = K(a - x)^2$
- c) Nêu hiện tượng xảy ra với nồng độ các chất khi $t \rightarrow +\infty$
- d) Nêu hiện tượng xảy ra với tốc độ phản ứng khi $t \rightarrow +\infty$

Lời giải

- a) Tìm tốc độ phản ứng tại thời điểm $t > 0$.

Tốc độ phản ứng là đạo hàm của $[C]$ theo biến t

$$\text{Do đó } [C]' = \left(\frac{a^2 K t}{a K t + 1} \right)' = \frac{a^2 K (a K t + 1) - a^2 K t \cdot a K}{(a K t + 1)^2} = \frac{a^2 K}{(a K t + 1)^2}$$

b) Theo câu trên nếu $x = [C]$ thì $x'(t) = \frac{a^2 K}{(a K t + 1)^2}$

Ta lại có $K(a - x)^2 = K \left(a - \frac{a^2 K t}{a K t + 1} \right)^2 = \frac{a^2 K}{(a K t + 1)^2}$ nên $x'(t) = K(a - x)^2$

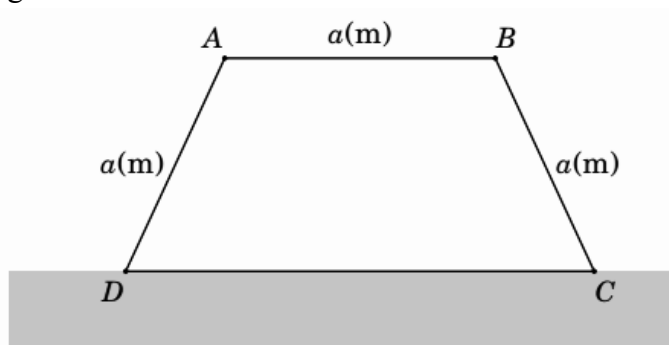
c) Ta có $\lim_{x \rightarrow \infty} [C] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^2 K t}{a K t + 1} = a$ (mol/l) nên nồng độ của chất C dần đến a (mol/l)

d) Ta có $\lim_{x \rightarrow \infty} x'(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^2 K}{(a K t + 1)^2} = 0$ (mol/l) nên tốc độ phản ứng dần đến 0.

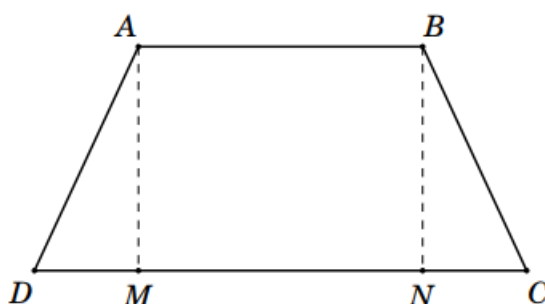
Câu 6: Một bác nông dân có ba tấm lưới B40, mỗi tấm dài a (m) và muốn rào một mảnh vườn dọc theo bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như hình vẽ dưới đây biết rằng bờ sông là đường thẳng



CD không phải rào lưới. Hỏi bác nông dân đó có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông?



Lời giải



Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B lên CD

Đặt $x = MD$, ($0 < x < a$) suy ra $AM = \sqrt{AD^2 - MD^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$

Diện tích của mảnh vườn hình thang cân là $S(x) = \frac{(AB + CD)AM}{2} = (a + x)\sqrt{a^2 - x^2}$.

Xét hàm số $f(x) = (a + x)\sqrt{a^2 - x^2}$ trên khoảng $(0 < x < a)$

$$\text{Đạo hàm } f'(x) = \frac{-2x^2 - ax + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a \notin (0 < x < a) \\ x = \frac{a}{2} \in (0 < x < a) \end{cases}$$

Bảng biến thiên hàm số $f(x)$ trên khoảng $(0; a)$

x	0	$\frac{a}{2}$	a
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	a^2	$\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$	0

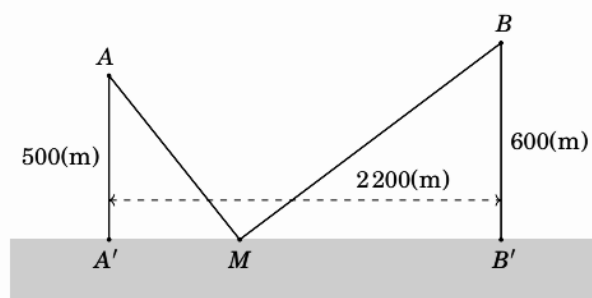
Từ bảng biến thiên suy ra $\max_{(0; a)} f(x) = f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$

Vậy bác nông dân có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là $\frac{3\sqrt{3}a^2}{4} \text{ m}^2$.

Câu 7: Có hai xã A, B cùng ở một bên bờ sông. Khoảng cách từ hai xã đó đến bờ sông lần lượt là $AA' = 550 \text{ m}$, $BB' = 600 \text{ m}$. Người ta đo được $A'B' = 2200 \text{ m}$ như hình vẽ dưới đây. Các kỹ sư



muốn xây dựng một trạm cung cấp nước sạch nằm cạnh bên bờ sông cho người dân của hai xã sử dụng. Để tiết kiệm chi phí, các kỹ sư phải chọn một vị trí M của trạm cung cấp nước sạch đó trên đoạn $A'B'$ sao cho tổng khoảng cách từ hai xã đến vị trí M là nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách đó.

**Lời giải**

Đặt $A'M = x$ ($0 < x < 2200$), $B'M = 2200 - x$

Ta có $AM = \sqrt{x^2 + 500^2}$, $BM = \sqrt{(2200 - x)^2 + 600^2}$

Khi đó tổng khoảng cách từ hai xã đến vị trí M là:

$$AM + BM = \sqrt{x^2 + 500^2} + \sqrt{(2200 - x)^2 + 600^2}$$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + 500^2} + \sqrt{(2200 - x)^2 + 600^2}$ trên khoảng $(0; 2200)$

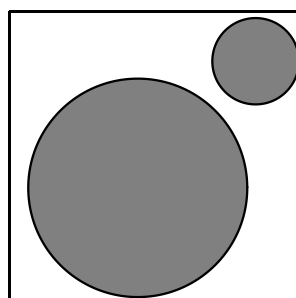
$$\text{Đạo hàm } f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 500^2}} - \frac{2200 - x}{\sqrt{(2200 - x)^2 + 600^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 1000$$

Bảng biến thiên:

x	0	1000	2200	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	2780		2460	2856

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách từ hai xã đó đến bờ sông là khoảng 2460 m, tại vị trí M cách điểm A' là 1000 m.

Câu 8: Từ một mảnh giấy hình vuông cho trước cắt thành hai hình tròn sao cho tổng diện tích của hai hình tròn là lớn nhất. Gọi k ($k \leq 1$) là tỉ số bán kính của chúng khi đó. Hỏi giá trị $\sqrt{k}$ bằng bao nhiêu?

**Lời giải**



Gọi đường chéo hình chữ nhật là a . Ta có: $R + r = \frac{a}{1 + \sqrt{2}}$.

Tìm max của $R^2 + r^2$. Khảo sát hàm, ta tìm được $R = \frac{a}{2\sqrt{2}}$ Từ đó ta tìm được $\sqrt{k} = \sqrt{2} - 1$.

Câu 9: Giả sử tỷ lệ sinh của tỉnh A tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số sau đây $f(t) = \frac{200}{1 + 4e^{-t}}; t \geq 0, t \in \mathbb{N}$, trong đó thời gian t được tính bằng tháng. Khi đó đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ tăng dân số của tỉnh A . Hỏi sau bao nhiêu tháng tốc độ tăng trưởng của dân số tỉnh A là lớn nhất?

Lời giải

Ta có $f(t) = \frac{200}{1 + 4e^{-t}} = \frac{200e^t}{e^t + 4}$ và có $f'(t) = \frac{800e^t}{(e^t + 4)^2} \Rightarrow f''(t) = \frac{800e^t(4 - e^t)}{(e^t + 4)^3} = 0 \Leftrightarrow t = \ln 4$.

Dựa vào bảng biến thiên:

t	0	$\ln 4$	$+\infty$
$f''(t)$		0	
$f'(t)$			

Vậy tốc độ tăng trưởng của dân số tỉnh A lớn nhất là $f'(\ln 4) = \frac{800e^{\ln 4}}{(e^{\ln 4} + 4)^2} = \frac{800 \cdot 4}{16^2} = \frac{25}{2}$ tại thời điểm $t = \ln 4 \approx 1,39$

Câu 10: Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t) = \frac{5000}{1 + 5e^{-t}}, t \geq 0$ trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành thì tốc độ bán hàng đạt lớn nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $f(t) = \frac{5000}{1 + 5e^{-t}} = \frac{5000e^t}{e^t + 5} \Rightarrow f'(t) = \frac{5000e^t(e^t + 5) - 5000e^{2t}}{(e^t + 5)^2} = \frac{25000 \cdot e^t}{(e^t + 5)^2} > 0, \forall t \geq 0$

$$\Rightarrow f''(t) = \frac{25000 \cdot e^t \cdot (e^t + 5)^2 - 50000 \cdot e^t \cdot (e^t + 5) \cdot e^t}{(e^t + 5)^4}$$

$$= \frac{25000 \cdot e^t \cdot (e^t + 5) \cdot (e^t + 5 - 2e^t)}{(e^t + 5)^4} = \frac{25000 \cdot e^t \cdot (5 - e^t)}{(e^t + 5)^3} = 0 \Leftrightarrow 5 - e^t = 0 \Leftrightarrow t = \ln 5.$$

Ta có bảng biến thiên:



t	0	$\ln 5$	$+\infty$	
$f''(t)$		+	0	-
$f'(t)$	6250	1250	0	
	9			

Dựa vào bảng biến thiên ta có tốc độ bán hàng lớn nhất là 1250.

Câu 11: Sau khi phát hiện ra dịch bệnh vi rút Đậu mùa Khỉ, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ khi xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ x là $f(x) = -x^3 + 18x^2$. Ta xem $f'(x)$ là tốc độ truyền bệnh tại thời điểm x . Tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày thứ bao nhiêu?

Lời giải

Ta có. $f'(x) = -3x^2 + 36x \Rightarrow f''(x) = -6x + 36$. Xét $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6$

Bảng biến thiên:

x	0	6	$+\infty$	
$f''(x)$		+	0	-
$f'(x)$	0		108	0

Như vậy tốc độ truyền bệnh lớn nhất vào ngày thứ 6.

Câu 12: Anh Nam có một cái ao diện tích 50 m^2 để nuôi cá diêu hồng. Vụ vừa qua, anh nuôi với mật độ 40 con/m^2 và thu được 3 tấn cá thành phẩm. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình anh thấy cứ thả giảm đi 8 con/m^2 thì mỗi con cá thành phẩm tăng thêm $0,5 \text{ (kg)}$. Để tổng năng suất cao nhất thì vụ tới anh Nam nên mua bao nhiêu cá giống để thả? (Giả sử không có hao hụt trong quá trình nuôi)

Lời giải

Số cá anh Nam nuôi vụ vừa qua là: 2000 (con)

Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phẩm là $\frac{3000}{2000} = 1,5 \text{ (kg/con)}$

Gọi x ($x > 0$) (con/m^2) là số cá mà anh Nam thả ít đi trong vụ tới, ta thấy:

Giảm $8 \text{ (con/m}^2)$ khối lượng cá thành phẩm tăng $0,5 \text{ kg/con}$

Giảm $x \text{ (con/m}^2)$ khối lượng cá thành phẩm tăng $0,0625x \text{ kg/con}$

Vậy tổng sản lượng cá thu được là: $f(x) = (2000 - 50x)(1,5 + 0,0625x)$

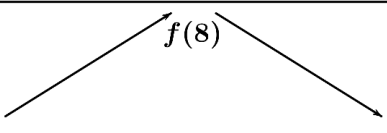
Khi đó, ta đi khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x)$

$$f(x) = 3000 + 125x - 75x - 3,125x^2 = -3,125x^2 + 50x + 3000$$



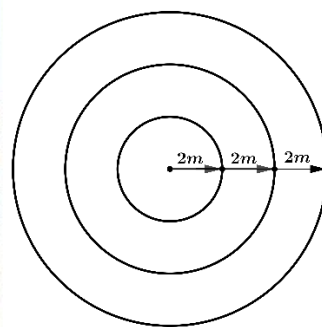
$$f'(x) = -6,25x^2 + 50 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = -8(l) \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	0	8	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Vậy để sản lượng cá thu được lớn nhất thì số cá cần thả của anh Nam là $2000 - 50.8 = 1600$ (con)

Câu 13: Một đường ống dẫn dầu bị rò rỉ hình thành nên một mảng dầu loang hình tròn trên mặt biển. Tốc độ tăng của bán kính mảng dầu loang theo thời gian là 2 (m/h). Khi đó tốc độ tăng của diện tích (tính theo m^2) của mảng dầu loang cũng phụ thuộc theo thời gian t (giờ). Hỏi tại thời điểm bán kính mảng dầu loang là 25 m thì tốc độ tăng diện tích mảng dầu loang theo thời gian là bao nhiêu (m^2/h)? (Đáp số làm tròn đến hàng đơn vị)



Bán kính của mảng dầu loang tăng theo thời gian, do vậy ta có thể coi bán kính r (m) của mảng dầu là một hàm số phụ thuộc theo thời gian t (h), tức là $r = f(t)$.

Từ giả thiết về tốc độ dầu loang ta có $f'(t) = 2$

Diện tích mảng dầu loang hình tròn là $S = \pi.r^2$, coi đây là hàm số theo biến r ta được $S'(r) = 2\pi.r$.

Sử dụng công thức tính đạo hàm hàm hợp, ta có: $S'(t) = S'(r).f'(t) = 4.\pi.r$

Khi $r = 25m$ thì $S'(t) = 100.\pi \approx 314$.

Tức là diện tích mảng dầu loang tăng với tốc độ $314m^2$ mỗi giờ.

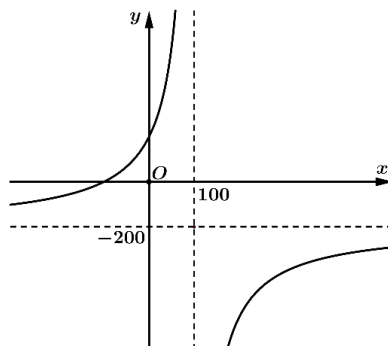
Câu 14: Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5}$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$. Đồ thị hàm số $y = f(t)$ có đường tiệm cận ngang là $y = a$. Giá trị của a là bao nhiêu?

Lời giải

$$\text{Ta có: } \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{26t + 10}{t + 5} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{26 + \frac{10}{t}}{1 + \frac{5}{t}} = 26 \Rightarrow \text{TCN: } y = 26.$$



Câu 15: Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm môi trường từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí (triệu đồng) cần bỏ ra được mô hình hóa bởi hàm số có dạng $C(x) = \frac{ax+b}{-x+d}$ (như hình vẽ), ($0 \leq x < 100$). Tính chi phí chênh lệch (tỉ đồng) phải bỏ ra để loại bỏ 90% và loại bỏ 99% chất gây ô nhiễm từ khí thải của nhà máy.



Lời giải

Từ đồ thị hàm số ta thấy: Đồ thị đi qua gốc tọa độ nên $b = 0$.

Đồ thị có đường tiệm cận đứng $x = 100 \Rightarrow d = 100$.

Đồ thị có đường tiệm cận ngang $y = -200 \Rightarrow -a = -200 \Rightarrow a = 200$.

Vậy ta có $C(x) = \frac{200x}{-x+100}$.

Suy ra chi phí chênh lệch (tỉ đồng) phải bỏ ra để loại bỏ 90% và loại bỏ 99% chất gây ô nhiễm từ khí thải của nhà máy là:

$$C(99) - C(90) = \frac{200 \cdot 99}{-99 + 100} - \frac{200 \cdot 90}{-90 + 100} = 18000 \text{ (triệu đồng)} = 18 \text{ tỉ đồng.}$$

Câu 16: Nồng độ C của một loại hóa chất trong máu sau t giờ tiêm vào cơ thể được cho bởi công thức $C(t) = \frac{4t}{64+t^3}$ với $t \geq 0$. Sau khoảng bao nhiêu giờ tiêm thì nồng độ của hóa chất trong máu là cao nhất? (kết quả làm tròn tới hàng phần trăm)

Lời giải

Ta có $C'(t) = \frac{-8t^3 + 256}{(64+t^3)^2}$ có $C'(t) = 0 \Leftrightarrow -8t^3 + 256 = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{32}$.

Bảng biến thiên:

t	0	$\sqrt[3]{32}$	$+\infty$
$C'(t)$	+	0	-
$C(t)$			

Dựa vào bảng biến thiên thì nồng độ hóa chất trong máu cao nhất khi $t = \sqrt[3]{32} \approx 3,17$ (giờ).



Câu 17: Trong khoảng thời gian từ ngày 01/01/2024 đến hết ngày 30/12/2024 nhóm nghiên cứu đã quan sát sự phát triển của một quần thể sinh vật X. Kết quả nghiên cứu chỉ ra rằng, tại ngày thứ t của năm 2024 (tính từ ngày 01/01/2024) số cá thể sinh vật X trong quần thể được ước lượng bởi hàm số $f(t) = -\frac{1}{300}t^3 + bt^2 + ct + 12000$ (con), $0 \leq t \leq 365$ và ngày 26/09/2024 là ngày có số lượng cá thể sinh vật X nhiều nhất với 55740 con. Ngày 25/11/2024 số lượng cá thể sinh vật X được ước lượng khoảng bao nhiêu nghìn con? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải

Năm 2024, tháng một có 31 ngày, tháng hai có 29 ngày, tháng ba có 31 ngày, tháng tư có 30 ngày, tháng năm có 31 ngày, tháng sáu có 30 ngày, tháng bảy có 31 ngày, tháng tám có 31 ngày, tháng chín có 30 ngày, tháng mười có 31 ngày, tháng mười một có 30 ngày.

Ta có $f(t) = -\frac{1}{300}t^3 + bt^2 + ct + 12000$ có $f'(t) = -\frac{1}{100}t^2 + 2bt + c$

Ngày 26/09/2024 ứng với $t = 270$ là ngày có số lượng cá thể sinh vật X nhiều nhất với 55740 con nên hàm số đạt cực đại tại $t = 270$.

$$f'(270) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{100}270^2 + 540b + c = 0 \Leftrightarrow 540b + c = 729 \quad (1)$$

$$f(270) = 55740 \Leftrightarrow -\frac{1}{300}270^3 + b \cdot 270^2 + 270c + 12000 = 55740 \Leftrightarrow 72900b + 270c = 109350 \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $b = \frac{6}{5}$, $c = 81$ vậy hàm số đã cho là $f(t) = -\frac{1}{300}t^3 + \frac{6}{5}t^2 + 81t + 12000$

Thử lại $f'(t) = -\frac{1}{100}t^2 + \frac{12}{5}t + 81$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 270 \\ t = -30 \quad (l) \end{cases}$

Bảng biến thiên:

t	0	270	365
$f'(t)$		+	0
$f(t)$			–

Hàm số đạt cực đại tại $t = 270$.

Ngày 25/11/2024 ứng với $t = 330$, khi đó số lượng cá thể sinh vật X được ước lượng khoảng bằng: $f(330) = -\frac{1}{300}330^3 + \frac{6}{5} \cdot 330^2 + 81 \cdot 330 + 12000 = 49620$ (con).

Câu 18: Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 2002 được tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người). Đạo hàm của hàm số $y = f(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Hỏi vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là 0,075 nghìn người/năm?



Lời giải

Ta có: $f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$ và vì t là số năm nên $t > 0$.

Hàm số xác định với $\forall t > 0$ có đạo hàm $f'(t) = \frac{120}{(t+5)^2}$

$$\Rightarrow f'(t) = 0,075 \Leftrightarrow \frac{120}{(t+5)^2} = 0,075 \Leftrightarrow (t+5)^2 = 1600 \Leftrightarrow (t+5)^2 = 40^2 \text{ suy ra } t = 35.$$

Vậy sau 35 năm kể từ năm 2002, tức là vào năm 2037 thì tốc độ tăng dân số của thị trấn đó là 0,075 nghìn người/năm.

Câu 19: Một bể chứa 3000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 25 gam/lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Giả sử nồng độ muối trong nước bể sau t phút được xác định bởi một hàm số $f(t)$ trên $t \in [0; +\infty)$ (gam/lít). Khi t càng lớn thì nồng độ muối trong bể tiến gần đến bao nhiêu gam/lít.

Lời giải

Sau t phút khối lượng muối trong bể là $25 \cdot 20 \cdot t = 500t$ (gam).

Thể tích của bể sau t phút là $3000 + 20 \cdot t$ (lít).

Khi đó nồng độ muối có trong nước bể là: $f(t) = \frac{500t}{3000 + 20t} = \frac{25t}{150 + t}$ (gam/lít).

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25t}{150 + t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25}{\frac{150}{t} + 1} = 25.$$

Vậy hi t càng lớn thì nồng độ muối trong bể tiến gần đến 25 gam/lít.

Câu 20: Số lượng cá thể của một loài sinh vật phụ thuộc nhiệt độ môi trường sống và được sắp xỉ bởi hàm số $f(t) = 300 \cdot e^{\frac{t}{5} - \frac{3t^2}{100}}$, trong đó t là nhiệt độ môi trường xét từ 0° đến 60° . Hỏi số cá thể loài sinh vật trên nhiều nhất là bao nhiêu?

Lời giải

Xét hàm số $f(t) = 300 \cdot e^{\frac{t}{5} - \frac{3t^2}{100}}$ có tập xác định $D = \mathbb{R}, [0; 60] \subset D$.

$$f'(t) = 300 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{3t}{50} \right) \cdot e^{\frac{t}{5} - \frac{3t^2}{100}}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow 300 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{3t}{50} \right) \cdot e^{\frac{t}{5} - \frac{3t^2}{100}} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{10}{3} \in (0; 60).$$

$$f(0) = 300; f\left(\frac{10}{3}\right) = 300 \cdot e^{\frac{10}{15} - \frac{3 \cdot 100}{100 \cdot 9}} = 300 \cdot e^{\frac{1}{3}} \approx 419, f(60) = 300 \cdot e^{\frac{60}{5} - \frac{3 \cdot 60^2}{100}} \approx 6,09 \cdot 10^{-40}.$$

$$\text{Vậy } \max_{[0; 60]} f(t) = f\left(\frac{10}{3}\right) \approx 419.$$



Câu 21: Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3$, $t = 0, 1, 2, \dots, 25$. Nếu coi $f(t)$ là hàm số xác định trên đoạn $[0; 25]$ thì đạo hàm $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t . Giả sử khoảng thời gian mà tốc độ truyền bệnh giảm là từ ngày thứ m đến ngày thứ n . Khi đó $n - m$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t được xác định bởi hàm $f'(t) = 90t - 3t^2$.

Ta có $f''(t) = 90 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = 15$.

Bảng biến thiên:

t	0	15	25	
$f''(t)$		+	0	−
$f'(t)$	0	↗ 675	↘ 375	

Dựa vào bảng biến thiên, tốc độ truyền bệnh giảm từ ngày 15 đến ngày 25.

Vậy $m - n = 25 - 15 = 10$.

Câu 22: Một bể ban đầu chứa 160 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 10 lít nước vào bể, đồng thời cho vào bể 21 gam chất khử trùng (hòa tan). Đặt $f(t)$ gam/lít là nồng độ chất khử trùng trong bể sau t phút ($t \geq 0$), biết rằng sau khi khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(t)$, ta thấy giá trị $f(t)$ tăng theo t nhưng không vượt ngưỡng p gam/lít. Tìm số p .

Lời giải

Sau t phút khối lượng chất khử trùng là $21t$ gam và thể tích nước là $160 + 10t$. Do đó nồng độ chất khử trong bể là $f(t) = \frac{21t}{10t + 160}$ $f'(t) = \frac{3360}{(10t + 160)^2} > 0$ nên $f(t)$ tăng theo t .

Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$

t	0	$+\infty$
$f'(t)$		+
$f(t)$	0	↗ $\frac{21}{10}$

Từ bảng biến thiên ta thấy $f(t)$ không vượt quá $\frac{21}{10} = 2,1$



Câu 23: Giả sử chiều cao (tính bằng cm) của một giống cây trồng (trong vòng một số tháng nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t) = \frac{200}{1+3e^{-t}}, t \geq 0$, trong đó thời gian t được tính bằng tháng kể từ khi hạt bắt đầu nảy mầm. Khi đó đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ tăng chiều cao của giống cây đó. Biết rằng kể từ khi hạt giống bắt đầu nảy mầm thì sau t tháng, tốc độ tăng chiều cao của cây là lớn nhất. Tính t (làm tròn kết quả đến đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

Xét hàm số $f(t) = \frac{200}{1+3e^{-t}}$ trên $[0; +\infty)$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{600e^{-t}}{(1+3e^{-t})^2}; f''(t) = \frac{600e^{-t}(3e^{-t}-1)}{(1+3e^{-t})^3}, f''(t) = 0 \Rightarrow e^{-t} = \frac{1}{3} \Rightarrow t = \ln 3$$

Bảng biến thiên:

t	0	$\ln 3$	$+\infty$
$f''(t)$	+	0	-
$f'(t)$	$\frac{75}{2}$	50	0

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra sau $t = \ln 3 \approx 1,1$ (tháng) thì tốc độ tăng chiều cao của cây là lớn nhất.

Câu 24: Một con cá hồi bơi ngược dòng (từ nơi sinh sống) vượt khoảng cách 300 km để tới nơi sinh sản. Vận tốc dòng nước là 6 (km/h). Giả sử vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$ trong đó c là hằng số cho trước. E tính bằng Jun. Tình vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên, để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất?

Lời giải

Theo đề bài, vận tốc của cá khi bơi trên sông là $v - 6$, khi đó thời gian để cá bơi đến nơi sinh sản là $t = \frac{300}{v-6}$.

Khi đó, $E(v) = cv^3 \frac{300}{v-6}$ với $v > 6$. Đặt $x = v - 6$.

Bài năng lượng tiêu hao của cá được tính bởi hàm số:

$$f(x) = 300c \frac{(x+6)^3}{x} = 300c \left(x^2 + 18x + 108 + \frac{216}{x} \right) \text{ với } x > 0.$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = 300c \left(2x + 18 - \frac{216}{x^2} \right) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 18x^2 - 216 = 0 \Rightarrow x = 3.$$

Bảng biến thiên:



x	0	$\ln 3$		$+\infty$
$f'(x)$		–	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(3)$		$+\infty$

Vậy $\min_{x \in (0; +\infty)} f(x) = f(3)$ hay khi vận tốc của cá khi nước đứng yên là $v = 9$ (km/h) thì cá ít tốn năng lượng nhất.

Câu 25: Huyết áp là đại lượng để đo độ lớn của lực tác dụng lên thành mạch máu. Nó được đo bằng 2 chỉ số; huyết áp tâm thu (là áp lực của máu lên động mạch khi tim co bóp) và huyết áp tâm trương (là áp lực của máu lên thành động mạch khi tim giãn ra). Huyết áp khác nhau đáng kể giữa người này và người khác, nhưng huyết áp tiêu chuẩn là $120/80$, nó có nghĩa là huyết áp tâm thu là 120mmHg và huyết áp tâm trương là 80mmHg. Giả sử rằng trái tim của một người đập 70 lần một phút, huyết áp riêng P sau t giây có thể được mô tả bằng hàm số $P(t) = 100 + 20\sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)$

. Trong thời gian từ 0 giây đến 1 giây, thời điểm $t = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a}{b}$ tối giản) mà tại đó huyết áp bằng 80 mmHg. Tính $2a - b$

Lời giải

$$\text{Xét } P(t) = 80 \Leftrightarrow 100 + 20\sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = 80 \Leftrightarrow 20\sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = -20 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{7\pi}{3}t = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow t = -\frac{3}{14} + \frac{6k}{7} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Mà } 0 \leq t \leq 1 \text{ nên } 0 \leq -\frac{3}{14} + \frac{6k}{7} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq k \leq \frac{17}{12}$$

$$\text{Mặt khác } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 1 \text{ thì } t = \frac{9}{14}$$

$$\text{Vậy } 2a - b = 2.9 - 14 = 4$$

Câu 26: Một bể chứa ban đầu có 250 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 25 lít nước, đồng thời cho vào bể 8 gam chất khử khuẩn (ClO_2) được hòa tan. Giả sử $C(t)$ là nồng độ chất khử khuẩn trong bể sau t phút (với $C(t) = \frac{m(t)}{V(t)}$, đơn vị gam/lít, trong đó $m(t)$ là khối lượng chất khử khuẩn trong bể và $V(t)$ là thể tích nước trong bể). Gọi c là số dương nhỏ nhất mà nồng độ chất khử khuẩn là $C(t)$ tăng theo thời gian t nhưng không vượt quá ngưỡng c gam/lít. Tìm c

Lời giải

$$\text{Nồng độ chất khử khuẩn trong bể sau } t \text{ phút là } C(t) = \frac{8t}{25t + 250}, t > 0$$

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $C(t)$ trên khoảng xác định



Ta có: $C'(t) = \frac{2000}{(25t + 250)^2} > 0, \forall t > 0$. Do đó $C(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

Ta có: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{8t}{25t + 250} = \frac{8}{25} = 0,32$

Vậy nồng độ chất khử khuẩn tăng theo thời gian và không vượt quá 0,32

Câu 27: Khi loại thuốc A được tiêm vào bệnh nhân, nồng độ (đơn vị: mg/l) của thuốc trong máu sau x phút (kể từ khi bắt đầu tiêm) được xác định bởi công thức $C(x) = \frac{30x}{x^2 + 2}$. Để đưa ra lời khuyên và cách xử lý phù hợp cho bệnh nhân, ta cần tìm khoảng thời gian mà nồng độ của thuốc trong máu đang tăng. Trong khoảng thời gian 6 phút sau khi tiêm, nồng độ thuốc trong máu đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu mg/l (kết quả được làm tròn đến hàng phần mười)?

Lời giải

Ta có $C'(x) = \frac{-30x^2 + 60}{(x^2 + 2)^2}$ nên $C'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

Suy ra $\max_{(0;6)} C(x) = C(\sqrt{2}) = \frac{15\sqrt{2}}{2} \approx 10,6$.

Câu 28: Trong Vật lý, một dao động điều hòa là dao động có phương trình chuyển động được cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó A là biên độ của dao động, ω (rad/s) là tần số góc và φ (rad) là pha ban đầu. Trong Vật lý, động năng (Tiếng Anh: *kinetic energy*) của một vật là năng lượng mà nó có được từ chuyển động của nó. Được xác định bởi công thức $W = \frac{1}{2} m.v^2(t)$ trong đó m (kg) là khối lượng của vật và $v(t)$ (m/s) là vận tốc của vật tại thời điểm t (s). Giả sử một vật có khối lượng $m = 100$ (gam) dao động điều hòa với phương trình chuyển động: $x = 40 \cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$ (cm). Khi đó động năng vật đó đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu (J)? (Làm tròn đến hàng phần chục)

Lời giải

Từ công thức $W = \frac{1}{2} m.v^2(t)$, để động năng vật đó đạt giá trị lớn nhất thì $v(t)$ (m/s) đạt giá trị lớn nhất.

Khi đó ta có $v(t) = (x(t))' = \left(40 \cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{3}\right)\right)' = -8000\pi \sin\left(200\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$ (cm/s).

Ta có $-8000\pi \leq v(t) = -8000\pi \sin\left(200\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \leq 8000\pi$

Vậy $v(t)$ (m/s) đạt giá trị lớn nhất bằng 80π (m/s).

Khi đó động năng lớn nhất của vật là: $W = \frac{1}{2} m.v^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot (8\pi)^2 \approx 316$ (J)

Câu 29: Biết rằng tốc độ đánh máy trung bình S (tính bằng từ trên phút) của một học viên lớn tuổi sau t tuần (kể từ khi chưa biết đánh máy) được cho bởi một trong hai công thức sau:



$$S(t) = \frac{at^2 + b}{ct^2 + d} \text{ và } S(t) = \frac{at^2 + b}{ct + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}; ac \neq 0).$$

Ông A (một người lớn tuổi chưa biết đánh máy) sau 4 tuần đi học thì tốc độ đánh máy trung bình đạt 20 từ trên phút, sau 6 tuần đạt 30 từ trên phút. Em hãy dự đoán xem, sau khóa học 15 tuần thì tốc độ đánh máy trung bình của ông A là bao nhiêu từ trên phút.

Lời giải

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{at^2 + b}{ct + d} = \pm\infty$ nên $S(t) = \frac{at^2 + b}{ct + d}$ loại. Ta có: $S(0) = 0 \Leftrightarrow b = 0 \Rightarrow S(t) = \frac{at^2}{ct^2 + d}$.

$$\text{Mặt khác có } \begin{cases} S(4) = 20 \\ S(6) = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a = 20(16c + d) \\ 36a = 30(36c + d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 80c + 5d & (1) \\ 6a = 180c + 5d & (2) \end{cases}$$

Lấy (2) trừ (1) ta được $a = 50c$ thay vào (1) ta được $d = 24c$.

$$\text{Vậy } S(t) = \frac{50ct^2}{ct^2 + 24c} = \frac{50t^2}{t^2 + 24} \text{ do đó } S(15) = \frac{50 \cdot 15^2}{15^2 + 24} \approx 45.$$

Câu 30: Một bể ban đầu chứa 150 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 50 lít nước, đồng thời cho vào bể 20 gam chất khử trùng (hòa tan). Gọi $f(t)$ (gam/lít) là nồng độ chất khử trùng trong bể sau t phút ($t \geq 0$), biết rằng sau khi khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(t)$, ta thấy giá trị $f(t)$ tăng theo thời gian t nhưng không vượt ngưỡng p gam/lít. Tìm số p (kết quả viết dưới dạng số thập phân).

Lời giải

Thể tích nước trong bể sau t phút là $150 + 50t$ (lít).

Khối lượng chất khử trùng trong bể sau t phút là $20t$ (gam).

Nồng độ chất khử trùng trong bể sau t phút là $f(t) = \frac{20t}{50t + 150}$ (gam/lít).

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{3000}{(50t + 150)^2} > 0, \forall t \geq 0 \text{ và } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{20t}{50t + 150} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

Vậy giá trị hàm $f(t)$ luôn tăng nhưng không vượt ngưỡng 0,4 gam/lít.

----- HẾT -----

**ĐỀ RÈN LUYỆN 07A: ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM GIẢI TOÁN THỰC TIỄN**

Chuyên đề tính đơn điệu của hàm số gồm lý thuyết và ví dụ minh họa

Sưu tầm và biên soạn: Phan Nhật Linh

KẾT NỐI TRI THỨC

Tài liệu khóa học luyện thi THPT Quốc Gia theo chương trình mới

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = t^2 - \frac{1}{6}t^3$ (m). Tìm thời điểm t (giây) mà tạo đó vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.

A. $t = 2$.**B.** $t = 0,5$.**C.** $t = 2,5$.**D.** $t = 1$.**Lời giải**

Ta có $v(t) = s'(t) = 2t - \frac{1}{2}t^2$. Suy ra $v'(t) = 2 - t$ và $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Bảng biến thiên

t	2
$v'(t)$	+ 0 -
$v(t)$	↗ 2 ↘

Vậy chất điểm đạt vận tốc lớn nhất tại thời điểm $t = 2$ (giây).

Câu 2: Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được cung cấp bởi một nguồn pin $12V$ được cho bởi công thức $P = 12I - 0,5I^2$ với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện. Tìm công suất tối đa của mạch điện.

A. 72.**B.** 12.**C.** $-\frac{1}{192}$.**D.** $\frac{23}{2}$.**Lời giải**

Xét hàm số $P = 12I - 0,5I^2$ với $I \geq 0$ có đạo hàm $P' = 12 - I$; $P' = 0 \Leftrightarrow I = 12$.

Bảng biến thiên:

I	0	12	$+\infty$
$P'(I)$		+ 0 -	
$P(I)$		↗ 72 ↘	

Công suất tối đa của mạch điện là $72(W)$ đạt được khi cường độ dòng điện là $12(A)$.



Câu 3: Một vật chuyển động theo quy luật $s = -2t^3 + 24t^2 + 9t - 3$ với t là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A.** 289(m/s) . **B.** 105(m/s) . **C.** 111(m/s) . **D.** 487(m/s) .

Lời giải

Ta có $v(t) = s' = -6t^2 + 48t + 9$. Xét hàm số $v(t) = -6t^2 + 48t + 9$, $t \in [0; 10]$.

$$\text{Ta có } v'(t) = -12t + 48 = 0 \Leftrightarrow t = 4 \text{ (Nhận)}. \text{ Ta có } \begin{cases} v(0) = 9 \\ v(4) = 105 \\ v(10) = -111 \end{cases} \Rightarrow \max_{t \in [0; 10]} v(t) = v(4) = 105.$$

Câu 4: Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được đo bởi công thức $G(x) = 0,25x^2(30 - x)$ trong đó x (mg) và $x > 0$ là lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân. Để huyết áp giảm nhiều nhất thì cần tiêm cho bệnh nhân một liều lượng bằng bao nhiêu:

- A.** 15mg **B.** 30mg **C.** 40mg **D.** 20mg

Lời giải

$$\text{Ta có: } G(x) = 0,25x^2(30 - x) = \frac{15}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3$$

$$\text{Đạo hàm } G'(x) = 15x - \frac{3}{4}x^2; \quad G'(x) = 0 \Leftrightarrow 15x - \frac{3}{4}x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 20 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	0	20	$+\infty$
$G'(x)$		+	-
$G(x)$		100	

Dựa vào bảng biến thiên thì bệnh nhân cần tiêm một lượng thuốc 20 mg

Câu 5: Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. độ sâu h (m) của mực nước trong kênh tính theo thời gian $t(h)$ trong ngày cho bởi công thức $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12$. Khi nào mực nước của kênh là cao nhất với thời gian ngắn nhất?

- A.** $t = 10(h)$ **B.** $t = 14(h)$ **C.** $t = 15(h)$ **D.** $t = 22(h)$

Lời giải

$$\text{Ta có: } h' = -3\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right).$$

$$h' = 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow t = -2 + 6k, (k \in \mathbb{Z}_{(+)})$$



Ở đây ta chỉ cần xét một số giá trị

k	1	2	3	4
t	4	10	16	22

Ta suy ra được h đạt giá trị lớn nhất khi $t=10$ (h)

Lưu ý: Ngoài cách trên ta có thể làm như sau

$$\text{Vì } -1 \leq \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \Rightarrow 9 \leq 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12 \leq 15.$$

$$\text{Vậy để } h \text{ lớn nhất thì } \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow t = -2 + 12k, (k \in \mathbb{Z}_{(+)})$$

Vậy h đạt giá trị lớn nhất khi $t=10$ (h)

Câu 6: Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $G(t) = 45t^2 - t^3$, (kết quả khảo sát được trong 10 tháng vừa qua). Nếu xem $G'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người / ngày) tại thời điểm t thì tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ:

A. 25

B. 30

C. 20

D. 15

Lời giải

$$\text{Ta có: } G'(t) = 90t - 3t^2; G''(t) = 90 - 6t = 0 \Leftrightarrow 90 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = 15$$

Bảng biến thiên:

t	0	15	$+\infty$
$G''(t)$		+	-
$G(t)$		↗ 675 ↘	

Vậy tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ 15.

Câu 7: Thể tích nước của một bể bơi sau t phút bơm tính theo công thức $V(t) = \frac{1}{100} \left(30t^3 - \frac{t^4}{4} \right)$ ($0 \leq t \leq 90$). Tốc độ bơm nước tại thời điểm t được tính bởi $v(t) = V'(t)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng.

A. Tốc độ bơm giảm từ phút 60 đến phút thứ 90.

B. Tốc độ bơm luôn giảm.

C. Tốc độ bơm tăng từ phút 0 đến phút thứ 75.

D. Cả ba đáp án đều sai

Lời giải

$$\text{Xét hàm } V' = \frac{9}{10}t^2 - \frac{1}{100}t^3 \quad (0 \leq t \leq 90); V'' = \frac{9}{5}t - \frac{3}{100}t^2 \Rightarrow V'' = 0 \text{ khi } t = 0, t = 60$$

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số V' đồng biến trên $(0; 60)$ và nghịch biến trên $(60; 90)$

Câu 8: Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà khoa học đã nhận thấy rằng: nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng là



$P(n) = 480 - 20n(g)$. Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

A. 14

B. 13

C. 12

D. 11

Lời giải

Gọi $F(n)$ là hàm cân nặng của n con cá sau vụ thu hoạch trên một đơn vị diện tích

Ta có: $F(n) = (480 - 20n).n = 480n - 20n^2$

Để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất thì cân nặng của n con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ là lớn nhất.

Bài toán trở thành tìm $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

$$F'(n) = 480 - 40n; F'(n) = 0 \Leftrightarrow 480 - 40n = 0 \Leftrightarrow n = 12$$

Học sinh tự lập bảng biến thiên.

Vậy phải thả 12 con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất.

Câu 9: Để giảm nhiệt độ trong phòng từ 28^0C , một hệ thống làm mát được phép hoạt động trong 10 phút. Gọi T (đơn vị 0C) là nhiệt độ phòng ở phút thứ t được cho bởi công thức $T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$ với $t \in [1;10]$. Tìm nhiệt độ thấp nhất trong phòng đạt được trong thời gian 10 phút kể từ khi hệ thống làm mát bắt đầu hoạt động.

A. $27,832^0C$.

B. $18,4^0C$.

C. $26,2^0C$.

D. $25,312^0C$.

Lời giải

Xét hàm số $T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$ với $t \in [1;10]$.

$$T' = -0,024t^2 - 0,16 < 0, \forall t \in [1;10] \text{ suy ra hàm số } T \text{ nghịch biến trên đoạn } [1;10].$$

Nhiệt độ thấp nhất trong phòng đạt được là $T_{\min} = T(10) = 18,4^0C$.

Câu 10: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu?

A. 2.250.000

B. 2.350.000

C. 2.450.000

D. 2.550.000

Lời giải

Gọi x là giá thuê thực tế của mỗi căn hộ, (x : đồng; $x \geq 2000.000$ đồng)

Ta có thể lập luận như sau:

Tăng giá 100.000 đồng thì có 2 căn hộ bị bỏ trống.

Tăng giá $x - 2.000.000$ đồng thì có bao nhiêu căn hộ bị bỏ trống.

$$\text{Theo quy tắc tam xuất ta có số căn hộ bị bỏ trống là: } \frac{2(x - 2.000.000)}{100.000} = \frac{x - 2.000.000}{50.000}$$

Do đó khi cho thuê với giá x đồng thì số căn hộ cho thuê là:

$$50 - \frac{x - 2.000.000}{50.000} = -\frac{x}{50.000} + 90$$

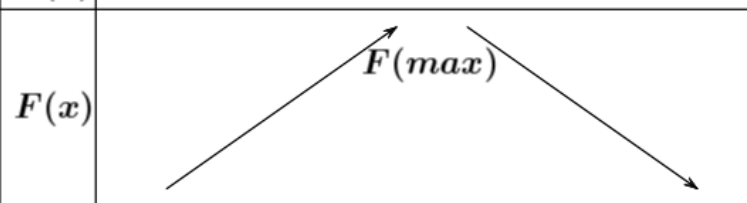
Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được khi cho thuê các căn hộ, ($F(x)$: đồng).

Ta có: $F(x) = \left(-\frac{x}{50.000} + 90\right)x = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90x$ (bằng số căn hộ cho thuê nhân với giá cho thuê mỗi căn hộ).

Câu toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của $F(x) = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90x$, $x \geq 2.000.000$

$$F'(x) = -\frac{1}{25.000}x + 90; F'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{25.000}x + 90 = 0 \Leftrightarrow x = 2.250.000$$

Bảng biến thiên:

x	2 000 000	2 250 000	$+\infty$
$F'(x)$	+	0	-
$F(x)$			

Suy ra $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 2.250.000$

Vậy công ty phải cho thuê với giá 2.250.000 đồng mỗi căn hộ thì được lãi lớn nhất.

Nhận xét:

Sau khi tìm được hàm $F(x) = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90x$. Ta không cần phải đi khảo sát và vẽ bảng biến thiên như trên. Đề đã cho bốn đáp án x , ta dùng phím CALC của MTCT để thay lần lượt các giá trị vào, cái nào làm cho $F(x)$ lớn nhất chính là giá trị cần tìm.

Câu 11: Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 40 quả bưởi. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 5000 đồng thì số bưởi bán được tăng thêm là 50 quả. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi quả là 30.000 đồng.

A. 44.000đ

B. 43.000đ

C. 42.000đ

D. 41.000đ

Lời giải

Gọi x là giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoan Hùng, (x : đồng; $30.000 \leq x \leq 50.000$ đồng).

Ta có thể lập luận như sau:

Giá 50.000 đồng thì bán được 40 quả bưởi

Giảm giá 5.000 đồng thì bán được thêm 50 quả.

Giảm giá 50.000 – x thì bán được thêm bao nhiêu quả?

Theo quy tắc tam xuất số quả bán thêm được là: $(50000 - x) \cdot \frac{50}{5000} = \frac{1}{100}(50000 - x)$.

Do đó Số quả bưởi bán được tương ứng với giá bán x : $40 + \frac{1}{100}(50000 - x) = -\frac{1}{100}x + 540$

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được ($F(x)$: đồng).

Ta có: $F(x) = \left(-\frac{1}{100}x + 540\right) \cdot (x - 30.000) = -\frac{1}{100}x^2 + 840x - 16.200.000$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số:



$$F(x) = -\frac{1}{100}x^2 + 840x - 16.200.000, \text{ điều kiện: } 30.000 \leq x \leq 50.000.$$

$$F'(x) = -\frac{1}{50}x + 840; F'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{50}x + 840 = 0 \Leftrightarrow x = 42.000$$

$$F(30.000) = 0; F(42.000) = 1.440.000; F(50.000) = 800.000$$

Vậy với $x = 42.000$ thì $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

Vậy để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất thì giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoàn Hùng là 42.000 đồng.

- Câu 12:** Một xe khách đi từ Việt Trì về Hà Nội chở tối đa được là 60 hành khách một chuyến. Nếu một chuyến chở được m hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách được tính là $\left(300 - \frac{5x}{2}\right)^2$ đồng. Tính số hành khách trên mỗi chuyến xe để nhà xe thu được lợi nhuận mỗi chuyến xe là lớn nhất?
A. 30 **B.** 40 **C.** 50 **D.** 60

Lời giải

Gọi x là số hành khách trên mỗi chuyến xe để số tiền thu được là lớn nhất ($0 < x \leq 60$)

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được ($F(x)$: đồng)

$$\text{Số tiền thu được: } F(x) = \left(300 - \frac{5x}{2}\right)^2 \cdot x = 90.000x - 1500x^2 + \frac{25}{4}x^3$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

$$F'(x) = 90000 - 3000x + \frac{75}{4}x^2; F'(x) = 0 \Leftrightarrow 90000 - 3000x + \frac{75}{4}x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 120(\text{loại}) \\ x = 40(\text{t/m}) \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	0	40	60
$F'(x)$	+	0	-
$F(x)$			

Vậy để thu được số tiền lớn nhất thì trên mỗi chuyến xe khách đó phải chở 40 người.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

- Câu 1:** Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người).





- a) Số dân của thị trấn vào đầu năm 1980 là 18 nghìn người.
 b) Số dân của thị trấn vào đầu năm 1995 là 23 nghìn người.
 c) Xem f là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ vậy hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$
 d) Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Vào năm 1998 thì tốc độ tăng dân số là 0,125 nghìn người/năm.

Lời giải

a) Đúng: Vào đầu năm 1980, ta có $t = 10; f(10) = 18$. Vậy số dân của thị trấn vào đầu năm 1980 là 18 nghìn người.

Vào đầu năm 1995 ta có $t = 25; f(25) = 22$.

Số dân của thị trấn vào đầu năm 1995 là 22 nghìn người.

b) Sai: $f'(t) = \frac{120}{(t+5)^2}$ với mọi $t > 0; f(t)$ liên tục trên $[0; +\infty)$ vì liên tục trên khoảng $(-5; +\infty)$

Vậy hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$.

c) Đúng: Tốc độ tăng dân số vào đầu năm 1990 là:

$$f'(20) = \frac{120}{25^2} = 0,192 \text{ do } t = 1990 - 1970 = 20$$

Tốc độ tăng dân số được dự kiến vào năm 2008 của thị trấn là:

$$f'(38) = \frac{120}{43^2} \approx 0,065 \text{ do } t = 2008 - 1970 = 38$$

Ta có: $f'(t) = 0,125 \Leftrightarrow \frac{120}{(t+5)^2} = 0,125 \Leftrightarrow t+5 = \sqrt{\frac{120}{0,125}} \approx 31 \Rightarrow t \approx 26$.

d) Sai: Vào năm 1996, tốc độ tăng dân số của thị trấn là 0,125.

Câu 2: Dân số của một quốc gia sau t (năm) kể từ năm 2023 được ước tính bởi công thức:

$$N(t) = 100e^{0,012t}, N(t) \text{ được tính bằng triệu người và } 0 \leq t \leq 50$$

- a) Dân số của quốc gia vào năm 2030 là: 108,763 (triệu người)
 b) Dân số của quốc gia vào năm 2035 là: 125,488 (triệu người)
 c) Xem $N(t)$ là hàm số của biến số t xác định trên đoạn $[0; 50]$. Khi đó hàm số $N(t)$ đồng biến trên đoạn $[0; 50]$.
 d) Đạo hàm của hàm số $N(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của quốc gia đó (tính bằng triệu người/năm). Vậy vào năm 2040 thì tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/năm.

Lời giải

a) Đúng: Dân số của quốc gia vào năm 2030 là: $N(7) = 100e^{0,012 \cdot 7} = 100e^{0,084} = 108,763$ (triệu người)

b) Sai: Dân số của quốc gia vào năm 2035 là: $N(12) = 100e^{0,012 \cdot 12} = 100e^{0,144} = 115,488$ (triệu người)



c) Đúng: Trên đoạn $[0; 50]$ ta có: $N'(t) = 0,012 \cdot 100e^{0,012t} = 1,2e^{0,012t} > 0, \forall t \in [0; 50]$

Do đó hàm số $N(t)$ đồng biến trên đoạn $[0; 50]$.

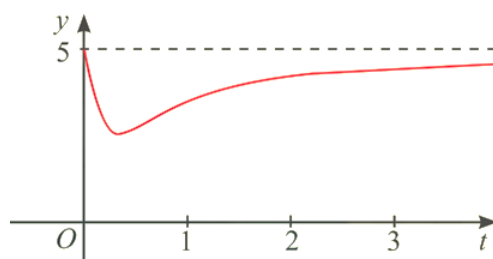
d) Ta có: $N'(t) = 1,2e^{0,012t}$

Với tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/ năm ta có:

$$1,6 = 1,2e^{0,012t} \Leftrightarrow e^{0,012t} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow t = \frac{250 \ln \frac{4}{3}}{3} \approx 23,97$$

Vậy vào năm 2046 thì tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/ năm.

Câu 3: Sự phân huỷ của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hoà tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau t giờ ($t \geq 0$) khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xấp xỉ bởi hàm số $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$. (có đồ thị như đường màu đỏ ở hình bên)



- Vào thời điểm $t = 1$ thì nồng độ oxygen trong nước là 3,5 (mg/l)
- Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước không vượt quá 5 (mg/l)
- Vào thời điểm $t = 0$ thì nồng độ oxygen trong nước cao nhất
- Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước thấp nhất là 3,5 (mg/l)

Lời giải

$$\text{Xét } y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1} \text{ trên nửa đoạn } [0; +\infty) \text{ có } y'(t) = \frac{135t^2 - 15}{(9t^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = -\frac{1}{3} (\text{loại}) \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
y'	—	0	+
y	5	$\frac{5}{2}$	5

Từ bảng biến thiên ta thấy $\min_{[0; +\infty)} y(t) = y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{2}$ và $\max_{[0; +\infty)} y(t) = y(0) = 5$



Vậy vào các thời điểm $t = 0$ thì nồng độ oxygen trong nước cao nhất và $t = \frac{1}{3}$ giờ thì nồng độ oxygen trong nước thấp nhất.

- a) Đúng: Vào thời điểm $t = 1$ thì nồng độ oxygen trong nước là 3,5 (mg/l)
- b) Đúng: Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước không vượt quá 5 (mg/l)
- c) Đúng: Vào thời điểm $t = 0$ thì nồng độ oxygen trong nước cao nhất
- d) Sai: Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước thấp nhất là 2,5 (mg/l)

Câu 4: Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox . Toạ độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $v(t)$; $v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $a(t)$.

- a) Hàm vận tốc là $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$
- b) Hàm gia tốc là $a(t) = 6t - 12$
- c) Trong khoảng từ $t = 0$ đến $t = 2$ thì vận tốc của chất điểm tăng
- d) Từ $t = 2$ trở đi thì vận tốc của chất điểm giảm

Lời giải

- a) Đúng: Hàm $v(t) = x'(t) = 3t^2 - 12t + 9$
- b) Đúng: Hàm $a(t) = v'(t) = 6t - 12$
- c) Sai: Tập xác định: $D = [0; +\infty)$ và $a(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Bảng biến thiên:

t	0	2	$+\infty$
$a(t)$		-	0
$v(t)$	9	-3	5

Vậy trong khoảng từ $t = 0$ đến $t = 2$ thì vận tốc của chất điểm giảm,

- d) Sai: Từ $t = 2$ trở đi thì vận tốc của chất điểm tăng

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho biết điện lượng truyền trong dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số $Q(t) = 2t^2 + t$, trong đó t được tính bằng giây (s) và Q được tính theo Culong (C). Tính cường độ dòng điện tại thời điểm $t = 4$ giây

Trả lời:

1	7		
---	---	--	--

**Lời giải**

Cường độ dòng điện tại thời điểm $t = 4 \text{ s}$ là $Q'(t) = I(t) = 4t + 1 \Rightarrow t(4) = 17$.

- Câu 2:** Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5$ trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 5 giây đầu tiên đó?

Trả lời:

1	3		
---	---	--	--

Lời giải

Ta có: $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 12t + 1$.

Nhận xét: $v(t)$ có đồ thị là một parabol nên trong 5s đầu tiên vận tốc tức thời của chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng 13 tại $t = 2 \text{ s}$.

- Câu 3:** Một tên lửa bay vào không trung với quãng đường đi được là $s(t)$ (km) là hàm phụ thuộc theo biến t (giây) tuân theo biểu thức sau: $s(t) = e^{t^2+3} + 2te^{3t+1}$ (km). Vận tốc của tên lửa sau 1 giây là $m.e^n$ (km/s). Tính $T = m + n$ (Biết hàm biểu thị vận tốc là đạo hàm cấp một của hàm biểu thị quãng đường theo thời gian)?

Trả lời:

1	4		
---	---	--	--

Lời giải

Ta có: $v(t) = s'(t) = 2te^{t^2+3} + 2e^{3t+1} + 6te^{3t+1} \Rightarrow v(1) = 2e^4 + 2e^4 + 6e^4 = 10e^4$ (km/s)

$$\text{Vậy } \begin{cases} m = 10 \\ n = 4 \end{cases} \Rightarrow T = m + n = 10 + 4 = 14$$

- Câu 4:** Một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ độ cao 2 m với vận tốc ban đầu là 24,5 (m/s). Trong Vật lý, ta biết rằng khi bỏ qua sức cản của không khí thì độ cao h (mét) của vật sau t (giây) được cho bởi công thức $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$. Hỏi sau bao nhiêu giây thì vật đạt độ cao lớn nhất?

Trả lời:

2	,	5	
---	---	---	--

Lời giải

Xét hàm số: $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

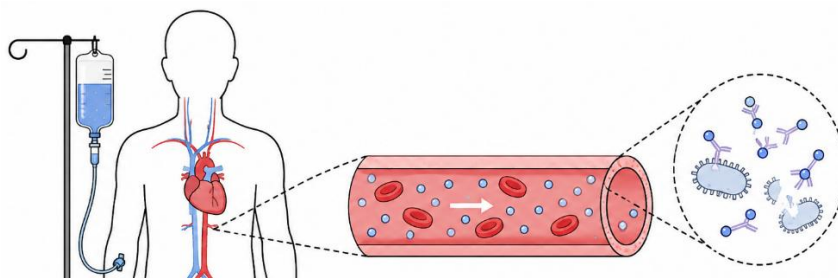
$$\text{Ta có: } h'(t) = -9,8t + 24,5; h'(t) = 0 \Leftrightarrow -9,8t + 24,5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2}$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$h'(t)$	+	0	-
$h(t)$	$-\infty$	$\frac{261}{8}$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $t = \frac{5}{2} = 2,5$ (giờ)

Câu 5: Một công ty dược phẩm đang trong giai đoạn cuối của việc phân tích một loại thuốc kháng sinh mới. Từ các thử nghiệm lâm sàng, nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân tại thời điểm t giờ kể từ khi bắt đầu uống thuốc tuân theo mô hình $C(t) = \frac{at}{t^2 + b}$ (microgam/lít), với a, b là các hằng số dương. Nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân lớn nhất bằng 12 (microgam/lít) tại thời điểm chính xác là 4 giờ kể từ khi bắt đầu uống thuốc. Biết rằng để thuốc phát huy tác dụng kháng khuẩn thì nồng độ của nó trong máu phải được duy trì ở ngưỡng tối thiểu là 10 (microgam/lít). Hãy xác định khoảng thời gian thuốc phát huy tác dụng kháng khuẩn kể từ khi bệnh nhân bắt đầu uống thuốc? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục)



Trả lời:

5 , 3

Lời giải

Hàm số biểu diễn nồng độ thuốc là: $C(t) = \frac{at}{t^2 + b}$ (với $t \geq 0$ và $a, b > 0$).

Tính đạo hàm của hàm số: $C'(t) = \frac{a(t^2 + b) - at(2t)}{(t^2 + b)^2} = \frac{a(b - t^2)}{(t^2 + b)^2}$

Theo giả thiết, nồng độ thuốc đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm $t = 4$ giờ. Điều này có nghĩa là $t = 4$ là điểm cực đại của hàm số.

Suy ra $C'(4) = 0$ suy ra $\frac{a(b - 16)}{(16 + b)^2} = 0 \Rightarrow b - 16 = 0 \Rightarrow b = 16$

Với $b = 16$ thì $C'(t) = \frac{a(16 - t^2)}{(t^2 + 16)^2}$. Rõ ràng $C'(t)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $t = 4$,

nên đây chắc chắn là điểm cực đại

Đồng thời, giá trị lớn nhất này bằng 12, tức là $C(4) = 12$. Thay $t = 4, b = 16$ vào hàm số ban đầu:

$$\frac{a.4}{4^2+16}=12 \Leftrightarrow \frac{4a}{32}=12 \Leftrightarrow \frac{a}{8}=12 \Rightarrow a=96$$

Vậy mô hình nồng độ thuốc chính xác là: $C(t) = \frac{96t}{t^2+16}$

Để thuốc phát huy tác dụng, nồng độ phải đạt ngưỡng tối thiểu là 10

Ta có bất phương trình: $C(t) \geq 10 \Leftrightarrow \frac{96t}{t^2+16} \geq 10$

Vì $t^2+16 > 0$ với mọi t nên $96t \geq 10(t^2+16) \Leftrightarrow 10t^2 - 96t + 160 \leq 0 \Leftrightarrow 5t^2 - 48t + 80 \leq 0$

Giải phương trình bậc hai $5t^2 - 48t + 80 = 0$, ta được hai nghiệm: $t_1 = \frac{24 \pm 4\sqrt{11}}{5}$

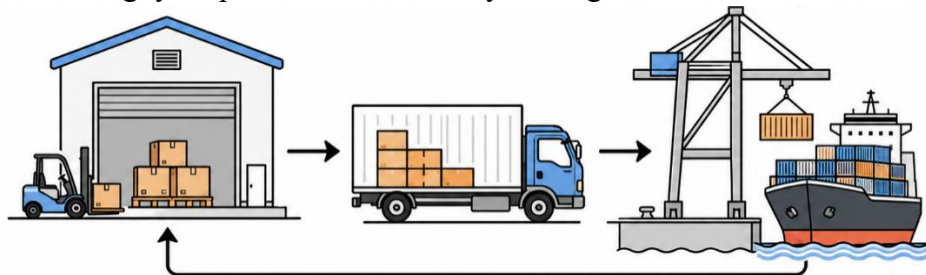
Vì hệ số $a = 5 > 0$, tam thức ≤ 0 khi t nằm trong khoảng hai nghiệm nên

$$t \in \left[\frac{24 - 4\sqrt{11}}{5}; \frac{24 + 4\sqrt{11}}{5} \right].$$

Thuốc phát huy tác dụng kháng khuẩn trong khoảng thời gian từ $\frac{24 - 4\sqrt{11}}{5}$ giờ (khoảng 2,15 giờ) đến $\frac{24 + 4\sqrt{11}}{5}$ giờ (khoảng 7,45 giờ) kể từ khi bắt đầu uống thuốc.

Vậy khoảng thời gian thuốc phát huy tác dụng là $\Delta t = 7,45 - 2,15 \approx 5,3$ (giờ)

Câu 6: Công ty X cần vận chuyển hàng đến một địa điểm cách công ty 100 dặm. Chi phí trên mỗi chuyến hàng mà công ty phải trả bao gồm chi phí nhiên liệu và chi phí thuê tài xế. Khi xe chở hàng di chuyển với tốc độ x dặm/giờ thì chi phí nhiên liệu (tính bằng USD) trên mỗi dặm đường được cho bởi công thức $C(x) = \frac{1}{5} \left(\frac{64}{x} + \frac{9}{100}x \right)$. Ngoài ra, giá thuê tài xế là 16 USD mỗi giờ lái xe. Biết rằng tốc độ di chuyển của xe chở hàng không được phép vượt quá 50 dặm/giờ. Hỏi chi phí nhỏ nhất mà công ty đó phải trả trên mỗi chuyến hàng là bao nhiêu USD?



Trả lời:

1	4	4	
---	---	---	--

Lời giải

Gọi x (dặm/giờ) là tốc độ di chuyển của xe chở hàng. Theo luật, điều kiện của x là $0 < x \leq 50$.

Tổng quãng đường là 100 dặm. Thời gian di chuyển của một chuyến hàng là: $t = \frac{100}{x}$ (giờ).

Tổng chi phí nhiên liệu là: $F_{nl}(x) = 100 \cdot \frac{1}{5} \left(\frac{64}{x} + \frac{9}{100}x \right) = 20 \left(\frac{64}{x} + \frac{9x}{100} \right) = \frac{1280}{x} + \frac{9x}{5}$ (USD)

Tổng chi phí thuê tài xế là: $F_{tx}(x) = 16 \cdot t = 16 \cdot \frac{100}{x} = \frac{1600}{x}$ (USD)



Hàm tổng chi phí cho mỗi chuyến hàng là $C_{total}(x) = F_{nl}(x) + F_{tx}(x)$:

$$\Leftrightarrow C_{total}(x) = \left(\frac{1280}{x} + \frac{9x}{5} \right) + \frac{1600}{x} = \frac{2880}{x} + \frac{9x}{5}$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $C_{total}(x) = \frac{2880}{x} + \frac{9x}{5}$ trên nửa khoảng $(0; 50]$.

Bài này có thể dùng đạo hàm hoặc dùng Bất đẳng thức Cauchy (AM-GM) cho nhanh:

Cách dùng BĐT Cauchy (Khuyến dùng vì rất gọn):

Vì $x > 0$, áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương $\frac{2880}{x}$ và $\frac{9x}{5}$, ta có:

$$C_{total}(x) = \frac{2880}{x} + \frac{9x}{5} \geq 2\sqrt{\frac{2880}{x} \cdot \frac{9x}{5}} = 2\sqrt{\frac{25920}{5}} = 2\sqrt{5184} = 2 \cdot 72 = 144$$

Dấu “=” xảy ra khi $\frac{2880}{x} = \frac{9x}{5} \Leftrightarrow 9x^2 = 14400 \Leftrightarrow x^2 = 1600 \Rightarrow x = 40$

Giá trị $x = 40$ hoàn toàn thỏa mãn điều kiện tốc độ tối đa $x \leq 50$.

Chi phí nhỏ nhất mà công ty phải trả cho mỗi chuyến hàng là 144 USD (khi tài xế chạy với tốc độ 40 dặm/giờ)

----- HẾT -----

**ĐỀ RÈN LUYỆN 07B: TỐI ƯU HÓA HÌNH HỌC**

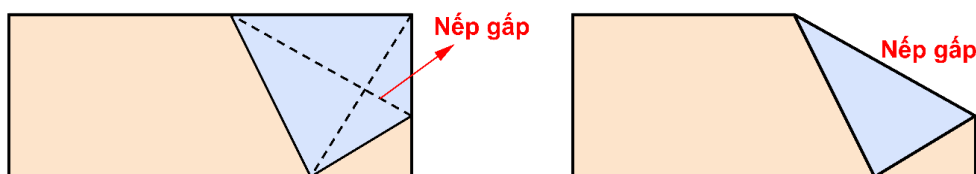
Chuyên đề tính đơn điệu của hàm số gồm lý thuyết và ví dụ minh họa

Sưu tầm và biên soạn: Phan Nhật Linh

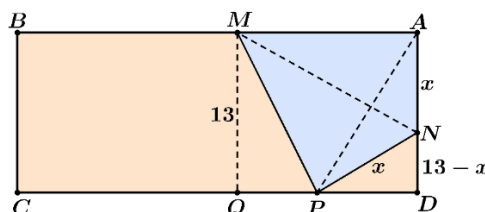
KẾT NỐI TRI THỨC

Tài liệu khóa học luyện thi THPT Quốc Gia theo chương trình mới

Câu 1: Một mảnh giấy hình chữ nhật có chiều dài 27 cm và chiều rộng 13 cm. Người ta thực hiện thao tác gấp góc trên bên phải của tờ giấy xuống sao cho nó chạm vào cạnh đáy dưới (minh họa như hình vẽ). Tính diện tích nhỏ nhất nhất của phần tam giác bị gấp (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

**Đáp án:**

--	--	--	--

Lời giảiTa có hình minh họa và dễ dàng nhận thấy P là điểm đối xứng với A qua MN .Đặt $\begin{cases} AN = NP = x \\ AM = MP \end{cases} \Rightarrow ND = 13 - x$ và xét tam giác vuông NDP vuông tại D

Áp dụng Pytago:

$$NP^2 = ND^2 + DP^2 \Leftrightarrow x^2 = (13 - x)^2 + DP^2 \Rightarrow DP = \sqrt{x^2 - (13 - x)^2} = \sqrt{26x - 169}$$

Dễ dàng chứng minh được: $MPQ = DNP$ nên

$$\triangle PMQ \sim \triangle NPD \Rightarrow \frac{PM}{NP} = \frac{MQ}{PD} \Rightarrow PM = \frac{13x}{\sqrt{26x - 169}}$$

Diện tích tam giác bị gấp là: $S_{\triangle MNP} = \frac{1}{2} \cdot PN \cdot PM = \frac{13x^2}{2\sqrt{26x - 169}} = f(x)$ xét trên $(6, 5; 13)$ Sử dụng Casio với chức năng $\left. \frac{d}{dx} \left(\frac{13x^2}{2\sqrt{26x - 169}} \right) \right|_{x=x} = 0$ hiển thị như sau:

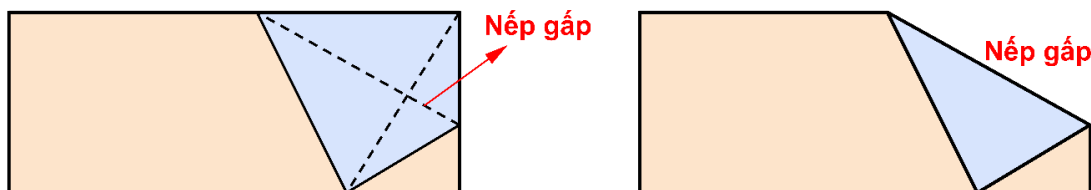
$$\left. \frac{d}{dx} \left(\frac{13x^2}{2\sqrt{26x - 169}} \right) \right|_{x=x} = 8.666666564$$

$$\frac{13x^2}{2\sqrt{26x - 169}} = 65.04813033$$

Khi đó: $\min_{(7,5;13)} f(x) = 65,04... \approx 65$ đạt tại $x = 8,66666...$



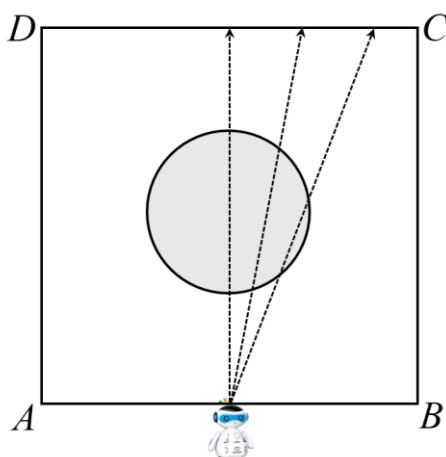
Câu 2: Một mảnh giấy hình chữ nhật có chiều dài 28 cm và chiều rộng 15 cm. Người ta thực hiện thao tác gấp góc trên bên phải của tờ giấy xuống sao cho nó chạm vào cạnh đáy dưới (minh họa như hình vẽ). Tính chiều dài ngắn nhất có thể của nếp gấp được tạo thành (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục)



Đáp án:

1	9	,	5
---	---	---	---

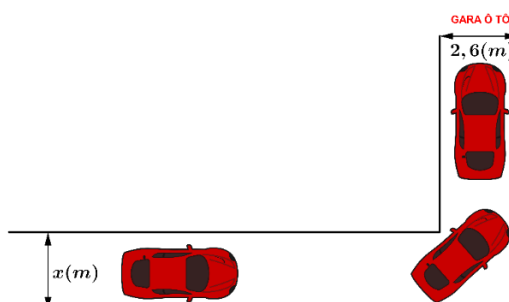
Câu 3: [PNL] Trên một khu đất hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 4 m đang diễn ra một cuộc thi. Mỗi đội chơi sẽ điều khiển một con robot xuất phát từ vị trí chính giữa cạnh AB di chuyển theo một đường thẳng và đến đích là một điểm nằm trên cạnh CD . Ở chính giữa khu đất có một bãi cát hình tròn có bán kính bằng 0,5 m. Biết vận tốc của robot khi di chuyển trên đất là 10 (m/phút) còn vận tốc di chuyển trên cát là 9 (m/phút) và robot luôn phải di chuyển qua bãi cát. Hỏi thời gian lớn nhất robot di chuyển đến đích bằng bao nhiêu giây? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



Đáp án:

--	--	--	--

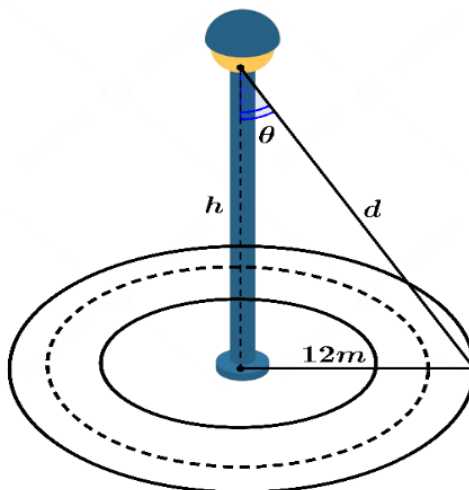
Câu 4: Hình vẽ bên dưới mô tả đoạn đường đi vào GARA Ô TÔ nhà cô Hiền. Đoạn đường đầu tiên có chiều rộng bằng x (m), đoạn đường thẳng vào cổng GARA có chiều rộng 2,6 (m). Biết kích thước xe ô tô là $5\text{m} \times 1,9\text{m}$. Để tính toán và thiết kế đường đi cho ô tô người ta coi ô tô như một khối hộp chữ nhật có kích thước chiều dài 5 (m), chiều rộng 1,9 (m). Hỏi chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị bên dưới để ô tô có thể đi vào GARA được? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục)



**Đáp án:**

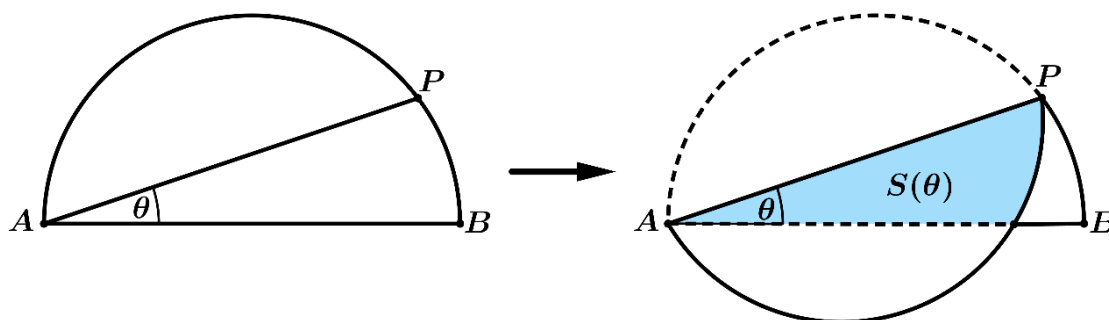
--	--	--	--

- Câu 5:** Một chiếc đèn được đặt trên đỉnh của một cột đèn cao h (m) để chiếu sáng một vòng xuyến giao thông đồng trục có bán kính 12 m. Cường độ ánh sáng I tại một điểm P trên vòng xuyến tỉ lệ thuận với cosin của góc θ và tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách a (m) từ nguồn sáng đến điểm P (xem hình dưới đây). Tính chiều cao cột đèn để cường độ ánh sáng I là lớn nhất (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục)

**Đáp án:**

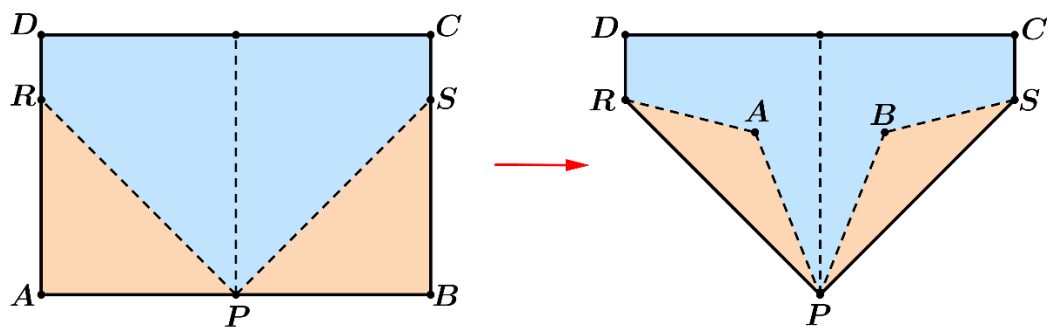
--	--	--	--

- Câu 6:** Cho một mảnh giấy màu hình bán nguyệt có đường kính là đoạn $AB = 2$. Trên cung AB lấy một điểm P . Ta thực hiện gấp mảnh giấy theo nếp gấp là đoạn thẳng AP sao cho hai phần giấy khít lên nhau. Khi góc $PAB = \theta$ thì gọi $S(\theta)$ là diện tích phần giấy bị chồng lên nhau (minh họa như hình vẽ dưới đây). Giả sử $S(\theta)$ đạt giá trị lớn nhất với $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ tại $\theta = \alpha$ thì giá trị của $\cos 2\alpha$ bằng bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

**Đáp án:**

--	--	--	--

- Câu 7:** **[PNL]** Cho một tờ giấy hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 18$ cm, $AD = 12$ cm. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD . Từ P tạo hai nếp gấp PR ($R \in AD$) và PS ($S \in BC$) sao cho nếu gấp phẳng thì hai đoạn PA và PB cùng trùng khít lên đoạn PQ . Tiến hành gấp hai $\triangle APR$ và $\triangle BPS$ lên không gian sao cho mặt phẳng (APR) và (BPS) cùng tạo với mặt phẳng phần giấy cố định $(PRQS)$ một góc $\theta \in (0^\circ; 180^\circ)$. Khối tứ diện $Q.PAB$ được tạo thành có thể tích đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu cm^3 ? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?



Trả lời:

--	--	--	--

----- HẾT -----



**ĐỀ RÈN LUYỆN 07C: TỐI ƯU HÓA TRONG SẢN XUẤT KINH DOANH**

Chuyên đề tính đơn điệu của hàm số gồm lý thuyết và ví dụ minh họa

Sưu tầm và biên soạn: Phan Nhật Linh

KẾT NỐI TRI THỨC

Tài liệu khóa học luyện thi THPT Quốc Gia theo chương trình mới

Câu 1: [**Đề chính thức 2026**] Một công ty nông sản có công suất chế biến không quá 200 tấn nguyên liệu một tháng. Nếu công ty chế biến x tấn nguyên liệu trong một tháng ($1 \leq x \leq 200$) thì chi phí sản xuất và doanh thu lần lượt là $C(x) = 0,001x^3 + 30x + 10$ (triệu đồng) và $R(x) = 60x$ (triệu đồng). Lợi nhuận lớn nhất mà công ty đạt được trong một tháng là bao nhiêu triệu đồng?

Trả lời:

1	9	9	0
---	---	---	---

Lời giảiHàm lợi nhuận là: $L(x) = R(x) - C(x) = 60x - (0,001x^3 + 30x + 10) = -0,001x^3 + 30x - 10$.Đạo hàm $L'(x) = -0,003x^2 + 30$ với $1 \leq x \leq 200$ Cho $L'(x) = 0 \Leftrightarrow -0,003x^2 + 30 = 0 \Leftrightarrow x = 100$ vì $x > 0$ Tính lợi nhuận tại $x = 100$ $L(100) = -0,001 \cdot 100^3 + 30 \cdot 100 - 10 = 1990$.

Vậy lợi nhuận lớn nhất là 1990 triệu đồng.

Câu 2: Bác An có một cửa hàng chuyên bán buôn bưởi Đoan Hùng, bác nhận thấy rằng: Nếu bán mỗi kilogram bưởi với giá 30 nghìn đồng thì mỗi tuần có 60 đơn hàng và mỗi đơn hàng mua 100 kilogram. Nếu cứ tăng giá mỗi kilogram bưởi thêm 2 nghìn đồng thì hàng tuần số đơn hàng giảm 4 đơn, đồng thời số lượng bưởi mà mỗi đơn hàng đặt mua cũng giảm đi 2 kilogram. Hỏi bác cần bán mỗi kilogram bưởi với giá bao nhiêu nghìn đồng để lợi nhuận hàng tuần thu được là lớn nhất, biết giá nhập mỗi kilogram bưởi là 24 nghìn đồng và giá bán không vượt quá 50 nghìn đồng/ 1 kilogram. (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Trả lời:

4	0		
---	---	--	--

Lời giảiGọi số tiền một kg bưởi là $30 + 2x$ (nghìn đồng)Ta có: $24 \leq 30 + 2x \leq 50 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 10$.Khi đó, lượng bưởi bán sẽ là $(60 - 4x)(100 - 2x)$ kg và tiền lời khi bán mỗi kg bưởi là

$$30 + 2x - 24 = 6 + 2x.$$

Doanh thu sẽ là $f(x) = (6 + 2x)(60 - 4x)(100 - 2x) = 16(x + 3)(15 - x)(50 - x)$ Ta có: $f'(x) = 16[(15 - x)(50 - x) - (x + 3)(50 - x) - (x + 3)(15 - x)] = 16(3x^2 - 124x + 555)$



Ta có: $f'(x) = \begin{cases} x \approx 5,107 & (n) \\ x \approx 36,227 & (l) \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} f(-3) = 0 \\ f(5,107) \approx 57609 \Rightarrow \max_{x \in [-3;10]} f(x) = f(5,107) \\ f(10) = 41600 \end{cases}$

Vậy khi bán một kg bưởi với giá $30 + 2 \cdot 5,107 \approx 40$ nghìn đồng/kg thì lợi nhuận thu được là lớn nhất.

Câu 3: Nếu một doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm trong một tháng ($x \in \mathbb{N}^*, 1 \leq x \leq 5000$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là $F(x) = -0,03x^2 + 800x$ (nghìn đồng), trong khi chi phí sản xuất bình quân cho một sản phẩm là $G(x) = \frac{50000}{x} + 450$ (nghìn đồng). Giả sử số sản phẩm sản xuất ra luôn bán hết. Trong một tháng, doanh nghiệp đó cần sản xuất ít nhất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được lớn hơn 100 triệu đồng?

Trả lời:

4	4	6	
---	---	---	--

Lời giải

Gọi $L(x)$ là hàm lợi nhuận của doanh nghiệp.

$$P(x) = F(x) - xG(x) = -0,03x^2 + 800x - x\left(\frac{50000}{x} + 450\right) = -0,03x^2 + 350x - 50000$$

Đề lợi nhuận thu được lớn hơn 100 triệu đồng tức là $L(x) > 100000$ hay

$$-0,03x^2 + 350x - 50000 > 100000$$

Suy ra $-0,03x^2 + 350x - 150000 > 0$ và bấm máy ta được $445,59 < x < 11221,08$

Do $x \in \mathbb{N}^*$ nên $x = 446$.

Câu 4: Công ty công nghệ chuyên sản xuất chip điện tử. Chi phí để sản xuất x đơn vị sản phẩm được xác định bởi hàm số: $C(x) = 0,1x^2 + 100x + 20000$ (USD). Một tập đoàn viễn thông ký hợp đồng mua sản phẩm với mức giá như sau: 1000 sản phẩm đầu tiên được bao tiêu với giá 650 USD/sản phẩm. Từ sản phẩm thứ 1001 trở đi, giá thu mua giảm xuống còn 450 USD/sản phẩm. Do việc sản xuất quá nhiều chip có thể gây quá tải cho hệ thống xử lý chất thải của khu công nghiệp. Vì vậy, cơ quan thuế nhà nước đã áp dụng một mức thuế phụ thu t (USD) trên mỗi đơn vị sản phẩm, nhưng chỉ tính từ sản phẩm thứ 1001 trở đi. Để cơ quan thuế thu được số tiền thuế phụ lớn nhất thì công ty công nghệ cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận lớn nhất?

Trả lời:

1	3	7	5
---	---	---	---

Lời giải

Hàm doanh thu: $D(x) = 1000 \cdot 650 + (x - 1000) \cdot 450$



Hàm thuế $T(x) = (x - 1000)t$.

Khi đó hàm lợi nhuận là: $L(x) = D(x) - C(x) - T(x)$

$$= 1000.650 + (x - 1000) \cdot 450 - (0,1x^2 + 100x + 20000) - (x - 1000)t$$

$$= -0,1x^2 + (350 - t)x + 180000 + 1000t.$$

Khi lợi nhuận càng lớn thì số tiền thuế sẽ càng lớn, nên ta cần tìm điều kiện để lợi nhuận lớn nhất và ta thấy được lợi nhuận lớn nhất khi $x = \frac{350 - t}{2(-0,1)} = 1750 - 5t$.

Khi đó, số tiền thuế phải nộp cho cơ quan thuế là $(x - 1000)t = (1750 - 5t - 1000)t$.

$$\text{Xét hàm số } g(t) = (1750 - 5t - 1000)t = (750 - 5t)t = -5t^2 + 750t \Rightarrow \max g(t) = g(75)$$

Vậy giá trị t cần tìm là 75 và số sản phẩm cần sản xuất là $x = 1375$

Câu 5: Trong kế hoạch khai thác tuyến ca nô cao tốc phục vụ du lịch sinh thái trên vùng lòng hồ Thủy điện Sơn La, từ bến Mường La đi Quỳnh Nhai, có chiều dài 100 km. Ban quản lý cần xác định vận tốc khai thác v (km/h) cho ca nô, với $30 \leq v \leq 70$, để đạt lợi nhuận kinh tế cao nhất. Các thông số được xác định như sau: Công suất tiêu thụ điện của động cơ ca nô là $P(v) = 10v^3$ (W). Giá điện kinh doanh tại bến sặc là 2000 đồng/kWh. Chi phí vận hành cố định gồm nhân lực lái tàu, khấu hao và bến bãi, được tính là 2500000 đồng cho mỗi giờ ca nô chạy. Số lượng khách mua vé cho mỗi chuyến phụ thuộc vào vận tốc khai thác theo hàm số $N(v) = \frac{v}{5} + 20$ khách hàng. Giá vé bình quân cho chuyến này là 500000 đồng/khách. Hãy xác định vận tốc khai thác v để lợi nhuận ròng của mỗi chuyến ca nô trên tuyến này là lớn nhất. Biết công thức tính điện lượng tiêu thụ là $A = P(v) \cdot t$

Trả lời:

5	0		
---	---	--	--

Lời giải

Gọi v (km/h) là vận tốc khai thác của ca nô, điều kiện $v \in [30; 70]$.

Thời gian ca nô chạy cho một chuyến đi 100 km là: $t = \frac{100}{v}$ (giờ)

Đổi đơn vị công suất tiêu thụ điện năng từ W sang kW:

$$P(v) = 10v^3 \text{ (W)} = \frac{10v^3}{1000} \text{ (kW)} = 0,01v^3 \text{ (kW)}$$

Điện lượng tiêu thụ cho mỗi chuyến đi là: $A = P(v) \cdot t = 0,01v^3 \cdot \frac{100}{v} = v^2$ (kWh)

Chi phí tiền điện cho mỗi chuyến đi là: $C_{\text{đien}} = A \cdot 2000 = 2000v^2$ (đồng)

Chi phí vận hành cố định cho mỗi chuyến đi là:

$$C_{\text{cố định}} = 2500000 \cdot t = 2500000 \cdot \frac{100}{v} = \frac{250000000}{v} \text{ (đồng)}$$



Tổng chi phí cho mỗi chuyến đi là: $C(v) = C_{\text{diện}} + C_{\text{co định}} = 2000v^2 + \frac{250000000}{v}$ (đồng)

Tổng số khách hàng cho mỗi chuyến là: $N(v) = \frac{v}{5} + 20$.

Tổng doanh thu thu được từ tiền bán vé cho mỗi chuyến đi là:

$$R(v) = N(v) \cdot 500000 = \left(\frac{v}{5} + 20\right) \cdot 500000 = 100000v + 10000000 \text{ (đồng)}$$

Hàm lợi nhuận ròng thu được cho mỗi chuyến đi là $L(v) = R(v) - C(v)$:

$$L(v) = 100000v + 10000000 - \left(2000v^2 + \frac{250.000.000}{v}\right)$$

$$\text{Đạo hàm } L'(v) = -4000v + 100000 + \frac{250000000}{v^2}$$

$$\text{Giải phương trình } L'(v) = 0 \Leftrightarrow -4000v + 100.000 + \frac{250.000.000}{v^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -4000v^3 + 100000v^2 + 250000000 = 0 \Leftrightarrow v^3 - 25v^2 - 62500 = 0 \Leftrightarrow v = 50 \text{ với } v \in [30; 70]$$

Ta có: $L(30) \approx 2866666$ (đồng)

$$L(50) = -2000(2500) + 100000(50) + 10000000 - \frac{250000000}{50} = 5000000 \text{ (đồng)}$$

$$L(70) \approx 3628571 \text{ (đồng)}$$

Từ quá trình tính toán trên, ta thấy lợi nhuận đạt giá trị lớn nhất là 5.000.000 đồng khi ca nô chạy với vận tốc $v = 50$ km/h.

Câu 6: Nếu một doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm trong một tháng ($x \in \mathbb{N}$; $1 \leq x \leq 300$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm là $F(x) = x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000$ (đồng). Trong đó, chi phí vận hành máy móc bình quân cho mỗi sản phẩm khi sản xuất x sản phẩm là $G(x) = 300 + \frac{100}{x}$ (nghìn đồng), chi phí mua nguyên vật liệu để sản xuất x sản phẩm là $H(x) = 2x^3 + 100000x - 50000$ (đồng). Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

Trả lời:

1	3	6	
---	---	---	--

Lời giải

Ta có lợi nhuận được tính như sau

$$L(x) = x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000 - x \left(300 + \frac{100}{x} \right) \cdot 1000 - (2x^3 + 100000x - 50000)$$

$$= -x^3 - 1999x^2 + 601000x + 200000$$

$$\text{Đạo hàm } L'(x) = -3x^2 - 3998x + 601000$$

$$\text{Cho } L'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 136,37 \text{ (vì } 1 \leq x \leq 300)$$

$$\text{Ta có } L(0) = 200000; L(300) = -26410000; L(136) = 42447040; L(137) = 42446416$$



Vì số sản phẩm sản xuất được là số tự nhiên, nên lợi nhuận thu được lớn nhất khi sản xuất 136 sản phẩm.

Câu 7: Một doanh nghiệp chuyên sản xuất ô tô hạng sang, biết nhu cầu của thị trường và chi phí của loại sản phẩm này lần lượt là $Q = 5000 - \frac{P}{3}$, $C(Q) = Q^2 + 2200Q + 500$, trong đó Q là số sản phẩm và P là giá bán của một sản phẩm. Giả sử nhà nước đánh thuế đặc biệt t triệu đồng trên mỗi đơn vị sản phẩm. Với mỗi mức thuế t , doanh nghiệp lựa chọn sản lượng Q để lợi nhuận đạt lớn nhất. Hãy xác định mức sản lượng Q mà doanh nghiệp sẽ sản xuất nếu nhà nước chọn mức thuế t sao cho số tiền thuế thu được là lớn nhất

Trả lời:

8	0	0	
---	---	---	--

Lời giải

Hàm giá bán (hàm cầu ngược) theo sản lượng Q là: $\frac{P}{3} = 5000 - Q \Rightarrow P = 15000 - 3Q$

Doanh thu của doanh nghiệp là: $R(Q) = P \cdot Q = (15000 - 3Q)Q = 15000Q - 3Q^2$

Chi phí sản xuất ban đầu là $C(Q) = Q^2 + 2200Q + 500$. Khi bị đánh thuế t trên mỗi đơn vị sản phẩm, doanh nghiệp phải chịu thêm một khoản chi phí thuế là $t \cdot Q$

Tổng chi phí thực tế của doanh nghiệp là: $T(Q) = Q^2 + 2200Q + 500 + tQ$

$L(Q) = R(Q) - T(Q) = (15000Q - 3Q^2) - (Q^2 + 2200Q + 500 + tQ)$

Đạo hàm $L'(Q) = -8Q + 12800 - t = 0 \Rightarrow 8Q = 12800 - t \Rightarrow Q(t) = 1600 - \frac{t}{8}$

Tổng số tiền thuế mà nhà nước thu được phụ thuộc vào mức thuế t và sản lượng $Q(t)$ mà doanh nghiệp quyết định sản xuất: $H(t) = t \cdot Q(t) = t \left(1600 - \frac{t}{8} \right) = 1600t - \frac{1}{8}t^2$

Đạo hàm $H'(t) = 1600 - \frac{1}{4}t = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}t = 1600 \Rightarrow t = 6400$

Thay mức thuế $t = 6400$ vào hàm phản ứng sản lượng của doanh nghiệp

$Q = 1600 - \frac{6400}{8} = 1600 - 800 = 800$ (sản phẩm)

Vậy mức sản lượng Q mà doanh nghiệp sẽ sản xuất là 800 (sản phẩm)

Câu 8: Mô hình *EOQ* (Economic Order Quantity) được công bố năm 1913 là một công cụ quản trị vận hành dùng để xác định lượng hàng nhập kho tối ưu. Giả sử một cửa hàng thức ăn cho mèo có nhu cầu tiêu thụ hàng hóa đều đặn với tốc độ bán hàng $d = 100$ hộp/ ngày. Các thông số chi phí được xác định như sau:

$K = 1.000.000$ đồng: chi phí cố định cho mỗi lần đặt hàng (phí vận chuyển, nhân công...);

c đồng/ hộp: giá nhập mỗi hộp hàng (giả định không đổi và không có chiết khấu);

$h = 500$ đồng/hộp/ngày: đơn giá lưu kho (chi phí lưu giữ một hộp hàng trong kho trong một ngày).

Gọi Q (hộp) là số lượng hàng mà người bán nhập vào trong mỗi lần đặt hàng. Thời gian tiêu thụ hết lượng hàng là $\frac{Q}{d}$ (ngày). Tổng chi phí cho một chu kỳ đặt hàng và tiêu thụ hết hàng là



$f = K + cQ + \frac{hQ^2}{2d}$. Hỏi cửa hàng nên nhập bao nhiêu hộp trong mỗi lần đặt hàng để chi phí trung bình mỗi ngày là nhỏ nhất (không làm tròn các bước trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng tới hàng đơn vị)?

Trả lời:

6	3	2	
---	---	---	--

Lời giải

Tốc độ bán hàng (nhu cầu) là $d = 100$ hộp/ngày.

Chi phí cố định mỗi lần đặt hàng: $K = 1.000.000$ đồng.

Giá nhập mỗi hộp: c đồng/hộp (hằng số).

Chi phí lưu kho: $h = 500$ đồng/hộp/ngày.

Số lượng hàng mỗi lần nhập: Q (đơn vị: hộp, $Q > 0$)

Tổng chi phí cho một chu kỳ (từ lúc nhập đến lúc hết hàng): $f(Q) = K + cQ + \frac{hQ^2}{2d}$

Thời gian tiêu thụ hết lượng hàng Q là: $T = \frac{Q}{d}$ (ngày).

Gọi $C(Q)$ là chi phí trung bình mỗi ngày nên ta có công thức: $C(Q) = \frac{f(Q)}{T} = \frac{K + cQ + \frac{hQ^2}{2d}}{\frac{Q}{d}}$

Suy ra $C(Q) = \frac{Kd}{Q} + cd + \frac{hQ}{2} \Rightarrow C'(Q) = -\frac{Kd}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0 \Leftrightarrow Q^2 = \frac{2Kd}{h} \xrightarrow{Q>0} Q = \sqrt{\frac{2Kd}{h}}$;

Với $K = 1.000.000$; $d = 100$ và $h = 500$ ta được $Q = 632,4555 \approx 632$ (hộp)

Vậy cửa hàng nên nhập khoảng 632 hộp trong mỗi lần đặt hàng để chi phí trung bình mỗi ngày là nhỏ nhất.

Câu 9: Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 500 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm ($x \in \mathbb{Z}, 1 \leq x \leq 500$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là $R(x) = x^3 - 396x^2 + 80000\ln x + 38800x + 500$ (nghìn đồng). Trong khi chi phí sản xuất bình quân cho một sản phẩm là $G(x) = x + 400 + \frac{2500}{x}$ (nghìn đồng). Giả sử sản phẩm làm ra luôn được bán hết, lợi nhuận lớn nhất khi doanh nghiệp sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Trả lời:

6	7		
---	---	--	--

Lời giải

Hàm tổng chi phí sản xuất: $C(x) = x.G(x) = x^2 + 400x + 2500$.

Hàm lợi nhuận: $P(x) = R(x) - C(x) = x^3 - 397x^2 + 80000\ln x + 38400x - 2000$.



Lấy đạo hàm $P'(x)$ và giải phương trình $P'(x) = 0$ bằng máy tính, ta tìm được nghiệm nguyên tối ưu để tối đa hóa lợi nhuận là $x = 67$ sản phẩm.

Câu 10: Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 500 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm ($1 \leq x \leq 500$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là

$$F(x) = x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000 \text{ (đồng)}$$

Trong khi chi phí sản xuất bình quân cho một sản phẩm là $G(x) = x + 1000 + \frac{250000}{x}$ (đồng).

Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

Trả lời:

3	3	3	
---	---	---	--

Lời giải

Lợi nhuận của doanh nghiệp khi sản xuất x sản phẩm là:

$$L(x) = F(x) - xG(x) = x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000 - x\left(x + 1000 + \frac{250000}{x}\right).$$

$$L(x) = x^3 - 2000x^2 + 1000000x \text{ có đạo hàm } L'(x) = 3x^2 - 4000x + 1000000$$

$$L'(x) = 3x^2 - 4000x + 1000000 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1000 \\ x = \frac{1000}{3}, x = 1000 \notin [0; 500], \text{ loại} \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $L(x)$ trên đoạn $[0; 500]$:

x	0	$\frac{1000}{3}$	500
$y'(x)$		+	0
$y(x)$			—

Do số sản phẩm là số nguyên nên ta xét giá trị của hàm số tại hai điểm nguyên trước và sau giá trị $\frac{1000}{3}$ là 333 và 334. Ta có $f(333) = 148148037; f(334) = 148147704 \Rightarrow f(333) > f(334)$

Do đó doanh nghiệp nên sản xuất 333 sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất.

Câu 11: Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 400 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm ($1 \leq x \leq 400$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó được biểu diễn bởi công thức là $F(x) = x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000$ (đồng). Trong đó chi phí vận hành máy móc cho mỗi sản phẩm là $G(x) = \frac{100000x}{3x+1}$ (đồng). Tổng chi phí mua nguyên vật liệu được biểu diễn



bởi hàm $H(x) = 2x^3 + 100000x - 50000$ (đồng) nhưng do doanh nghiệp đó mua nguyên vật liệu với số lượng lớn nên được giảm 1% cho 200 sản phẩm đầu tiên doanh nghiệp sản xuất và giảm 2% cho sản phẩm tiếp theo. Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

Trả lời:

2	5	3	
---	---	---	--

Lời giải

Lợi nhuận $P(x)$ được tính bằng doanh thu trừ đi tổng chi phí: $P(x) = F(x) - xG(x) - H(x)$.

Khi $x \leq 200$ thì chi phí mua nguyên liệu là: $H_1(x) = 0,99(2x^3 + 100000x - 50000)$ (đồng)

Khi $x > 200$ thì chi phí mua nguyên liệu là:

$$H_2(x) = 0,99(2 \cdot (200^3) + 100000 \cdot 200 - 50000) + 0,98(2(x-200)^3 + 100000 \cdot (x-200) - 50000)$$

(đồng)

Xét đồng thời 2 trường hợp:

Trường hợp 1: Với $1 \leq x \leq 200$ thì ta có lợi nhuận thu được là: $P_1(x) = F(x) - xG(x) - H_1(x)$

$$= x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000 - \frac{100000x^2}{\frac{3}{2}x + 1} - 0,99(2x^3 + 100000x - 50000)$$

$$\text{Ta có: } P_1'(x) = -\frac{147}{50}x^2 - 3998x - \frac{600000x^2 + 800000x}{(3x+2)^2} + 902000$$

Phương trình $P_1'(x) = 0$ có nghiệm $x = 184,03 \in (1; 200)$.

Ta thấy $\max_{[1; 200]} P_1(x) = 80037062,09$ tại $x = 184,03$.

Trường hợp 2: Với $201 \leq x \leq 400$ ta có lợi nhuận thu được là: $P_2(x) = F(x) - xG(x) - H_2(x)$

$$= x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000 - \frac{100000x^2}{\frac{3}{2}x + 1} - 0,99(2 \cdot (200^3) + 100000 \cdot 200 - 50000) - 0,98(2(x-200)^3 + 100000 \cdot (x-200) - 50000)$$

$$= -\frac{24}{25}x^3 - 823x^2 + 667800x - 11500 - \frac{200000x^2}{3x+2}$$

$$\text{Ta có: } P_2'(x) = -\frac{72}{25}x^2 - 1646x - \frac{600000x^2 + 800000x}{(3x+2)^2} + 667800$$

Phương trình $P_2'(x) = 0$ có nghiệm $x = 253,1 \in (201; 400)$.

Ta thấy $\max_{[201; 400]} P_2(x) = 83893667,52$ tại $x = 253,1$.



Vậy doanh nghiệp cần sản xuất 253 sản phẩm thì lợi nhuận thu được là lớn nhất.

Câu 12: Anh An thành lập một công ty sản xuất in ấn Sách Giáo Khoa chương trình "Chân trời sáng tạo". Nhằm tạo điều kiện cho các nhà sách tiêu thụ giá hợp lý, đơn giá mỗi bộ sách ban đầu được biểu diễn theo hàm $p(x) = 200 - 3x$ (nghìn đồng) với x là số lượng từng bộ sách bán ra và tổng chi phí sản xuất được biểu diễn theo hàm $C(x) = 75 + (80 + T)x - x^2$ (nghìn đồng) với mọi x thỏa $0 \leq x \leq 40$, trong đó T (nghìn đồng) là mức thuế giá trị gia tăng VAT phải đóng trên từng số lượng bộ sách sản xuất ra mà công ty anh An phải chi trả. Xem như công ty anh An sản xuất đều đặn trong điều kiện lý tưởng, khi lợi nhuận của công ty đạt giá trị cao nhất thì tổng mức thuế phải chi trả cũng đồng thời cao nhất. Khi đó mức thuế của mỗi bộ sách mà công ty phải trả là bao nhiêu (Đơn vị: nghìn đồng)?

Trả lời:

6	0	0	
---	---	---	--

Lời giải

Trước hết ta có hàm chi phí sản xuất là: $C(x) = 75 + (80 + T)x - x^2$

Doanh thu của công ty anh An biểu diễn theo hàm $R(x) = x.p(x) = x(200 - 3x)$

Lợi nhuận mà công ty anh An có được là: $P(x) = R(x) - C(x) = -2x^2 + (120 - T)x - 75$

Do cần xác định số lượng bộ sách bán ra để lợi nhuận là cao nhất nên ta có:

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^2 + (120 - T)x = 0 \Leftrightarrow x = 30 - \frac{T}{4}$$

Khi đó với thuế mỗi bộ sách là T thì tổng mức thuế công ty phải trả là $G(T) = T\left(30 - \frac{T}{4}\right)$

Khi lợi nhuận của công ty đạt giá trị cao nhất thì tổng mức thuế phải chi trả cũng đồng thời cao nhất nên ta suy ra $G'(T) = 0 \Leftrightarrow \frac{T}{2} - 30 = 0 \Leftrightarrow T = 60$ (nghìn đồng).

Câu 13: Trước sự phát triển của ngành vật liệu bán dẫn, anh Khoa mở nhà máy sản xuất vi mạch với thiết kế của vi mạch có dạng hình chữ nhật có kích thước $a(\text{pm}) \times b(\text{pm})$ với $1\text{pm} = 10^{-12}\text{ m}$. Biết rằng chi phí để sản xuất vi mạch bao gồm 50 (triệu đồng) chi phí cho nguyên vật liệu ban đầu, 15 (triệu đồng)/ 1pm chi phí gia công lắp màng Silic xung quanh thành vi mạch (xem như độ dày khi gia công là không đáng kể) và 32 (triệu đồng)/ 1pm^2 tiền gia công phủ chất làm mát bao quanh cả 2 bề mặt vi mạch (xem như cả bề mặt là hình chữ nhật có kích thước như trên). Biết rằng đơn giá bán ra mỗi chiếc vi mạch là 428 (triệu đồng/ pm^2) và nếu cả 2 kích thước thành phần của vi mạch giảm đi 15 pm thì lợi nhuận thu được mỗi chiếc bằng chi phí sản xuất của mỗi chiếc vi mạch đó. Khi lợi nhuận đạt giá trị nhỏ nhất thì chu vi của vi mạch là bao nhiêu pm. (Kết quả làm tròn đến số thập phân thứ nhất)

Trả lời:

6	3	,	2
---	---	---	---

Lời giải

Từ giả thiết ta có hàm chi phí sản xuất vi mạch là: $C(a, b) = 50 + 15.2(a + b) + 32.(2ab)$



Sau khi giảm đi 15 pm của mỗi kích thước của vi mạch thì chi phí sản xuất được biểu diễn lại theo hàm mới là: $C(a-15, b-15) = 50 + 15.2(a+b-30) + 64(a-15)(b-15)$ (triệu đồng)

Đơn giá bán ra mỗi chiếc vi mạch là: $R(a-15, b-15) = 428(a-15)(b-15)$ (triệu đồng)

Lợi nhuận = Doanh thu - Chi phí nên khi cả 2 kích thước thành phần của vi mạch giảm đi 15 pm thì lợi nhuận thu được mỗi chiếc bằng chi phí sản xuất của mỗi chiếc vi mạch đó sẽ tương ứng với đơn giá bán ra sẽ gấp 2 lần chi phí sản xuất.

Từ đó ta có thể suy ra được: $R(a-15, b-15) = 2C(a-15, b-15)$

Khi đó ta có phương trình: $5 + 3(a+b-30) = 15(a-15)(b-15) \Rightarrow b = \frac{4(57a-865)}{3(5a-76)} \quad (1).$

Lợi nhuận ban đầu lúc này được biểu diễn theo hàm số sau:

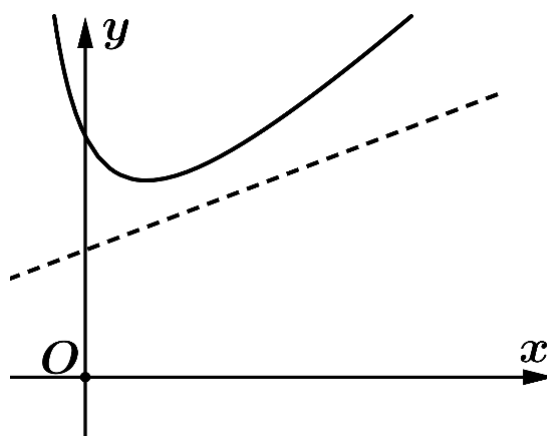
$$T(a) = R(a) - C(a) = \frac{82542a^2 - 1260190a + 115200}{3(5a-76)}, a > 15 \text{ (triệu đồng)}$$

$$\text{Xét } T'(a) = \frac{27514}{5} - \frac{770392.3}{5(15a-228)^2} = 0 \Leftrightarrow a = a_0 = \frac{76}{5} + \frac{2}{5}\sqrt{\frac{7}{3}} > 15 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Suy ra $T(a_0)$ là giá trị lợi nhuận nhỏ nhất, thế vào (1) suy ra $b_0 = \frac{4(57a_0-865)}{3(5a_0-76)}$

Tức $2.(a+b) \approx 63,2(pm).$

Câu 14: Một doanh nghiệp kinh doanh sản xuất đồng hồ có đồ thị hàm tổng chi phí theo số sản phẩm là một phần đồ thị của hàm số bậc hai trên bậc nhất $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + e}$ như hình vẽ (mỗi đơn vị trên trục hoành tương ứng 100 sản phẩm và mỗi đơn vị trên trục tung tương ứng 1000USD). Biết rằng tâm đối xứng của đồ thị hàm số $f(x)$ là $A\left(-1; \frac{2}{3}\right)$ và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đi qua điểm $B(3; 2)$. Theo khảo sát, tổng doanh thu của doanh nghiệp này được mô tả bởi hàm số $R(x) = x^2 + 2x$ và lợi nhuận thu về khi bán 200 sản phẩm bằng 5250 USD. Khi chi phí theo số sản phẩm đạt giá trị nhỏ nhất thì số sản phẩm sản xuất được là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

**Trả lời:**

2	5		
---	---	--	--

Lời giải

Dễ dàng suy ra được $e = 1$ và đồ thị có đường tiệm cận đứng là $x = -1$

Gọi đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$ là $y = ax + b$

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} -a + b = \frac{2}{3} \\ 3a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = 1 \end{cases}$ nên đường tiệm cận xiên là $y = \frac{1}{3}x + 1$

Hàm số $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + e}$ được viết lại dưới dạng $f(x) = \frac{1}{3}x + 1 + \frac{d}{x + 1}$

Lợi nhuận = Doanh thu - Chi phí $\Leftrightarrow P(x) = R(x) - f(x) \Leftrightarrow x^2 + 2x - \frac{1}{3}x - 1 - \frac{d}{x + 1}$

Theo giả thiết lợi nhuận thu về khi bán 200 sản phẩm bằng 5250 USD.

Khi đó $P(2) = 5,25 \Leftrightarrow \frac{19}{3} - \frac{d}{3} = 5,25 \Leftrightarrow d = \frac{13}{4} = 3,25$

Vậy $f(x) = \frac{1}{3}x + 1 + \frac{3,25}{x + 1}$ có đạo hàm $f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{3,25}{(x + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\sqrt{39}}{2} - 1 (\text{loại}) \\ x = \frac{\sqrt{39}}{2} - 1 (\text{nhận}) \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{\sqrt{39}}{2} - 1$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\frac{17}{4}$	$\frac{\sqrt{39}}{3} + \frac{2}{3}$	$+\infty$

Vậy số sản phẩm khi chi phí đạt giá trị nhỏ nhất là $\left(\frac{\sqrt{39}}{2} - 1\right) \cdot 100 \approx 212$ sản phẩm.



Câu 15: Một nhà hàng có tổng cộng 30 nhân viên và chi trả mức lương cố định cho mỗi nhân viên thường xuyên tăng ca là 400 USD/tháng. Vì nhà hàng liên tục đón những đoàn khách với số lượng lớn nhưng không thể thuê thêm nhân viên nên chủ nhà hàng này muốn khuyến khích nhân viên của mình tăng ca. Ông chủ quyết định cứ một nhân viên quyết định tăng ca thì mức lương của tất cả nhân viên tăng ca trong nhà hàng đều được tăng thêm 2%. Tương tự, nếu k nhân viên tăng ca thì lương cho mỗi người sẽ tăng $2k\%$. Bên cạnh tiền lương cho nhân viên thì tiền điện nước và duy trì cơ sở vật chất là cố định 8000 USD/tháng. Doanh thu trung bình từ khách hàng là 10000 USD/tháng và mỗi nhân viên tăng ca trung bình sẽ được khách hàng tip 800 USD/tháng (Tiền tip phải được nộp lại cho chủ cửa hàng và tính vào doanh thu). Xác định số nhân viên tăng ca cần có để lợi nhuận của nhà hàng đạt lớn nhất

Trả lời:

2	5		
---	---	--	--

Lời giải

Gọi x là số nhân viên tăng ($0 \leq x \leq 30$) ca thì lương của mỗi nhân viên tăng ca là:

$$400(1 + 0,02x) \text{ USD/tháng}$$

Khi đó tổng lương của nhân viên tăng ca là: $400x(1 + 0,02x)$ USD/tháng và tổng tiền tip của x nhân viên tăng ca là: $800x$ USD/tháng

Doanh thu của cửa hàng là: $10000 + 800x$

Lợi nhuận của cửa hàng bằng doanh thu trừ đi chi phí nên ta có:

$$L(x) = 10000 + 800x - 400x(1 + 0,02x) - 8000 = 2000 + 400x - 8x^2$$

Ta có: $L'(x) = -16x + 400 = 0 \Leftrightarrow x = 25$

Hàm số $L(x)$ là một parabol có bề lõm hướng xuống nên $L(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 25$

Vậy số nhân viên tăng ca cần có để lợi nhuận của nhà hàng đạt lớn nhất là 25 người.

Câu 16: Từ năm 2004 đến năm 2019 doanh thu $R(t)$ (tính bằng triệu đô la) của McDonald's có thể được mô hình hóa bởi $R(t) = -130,769t^3 + 2296,47t^2 - 11493,5t + 35493$ ($4 \leq t \leq 19$), trong đó t là đại diện cho năm, với $t = 4$ tương ứng với năm 2004. Biết rằng $R'(t)$ là hàm tốc độ doanh thu theo thời gian. Tốc độ thay đổi doanh thu của McDonald's lớn nhất vào năm nào? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị, tính theo triệu đô la mỗi năm)

Trả lời:

2	0	0	6
---	---	---	---

Lời giải

Ta có hàm tốc độ doanh thu là $R'(t) = -392,307t^2 + 4592,94t - 11493,5$.

$$R''(t) = -784,614t + 4592,94 = 0 \Leftrightarrow t \approx 6 \text{ (nhận).}$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số:



t	4	6	19
$R''(t)$	+	0	-
$R'(t)$	601	1941	-65851

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy rằng tốc độ thay đổi doanh thu của McDonald's lớn nhất vào năm 2006 (tương ứng với $t = 6$).

Câu 17: Theo thống kê tại một nhà máy Z , nếu áp dụng tuần làm việc 40 giờ thì mỗi tuần có 100 tổ công nhân đi làm và mỗi tổ công nhân làm được 120 sản phẩm trong một giờ. Nếu tăng thời gian làm việc thêm 2 giờ mỗi tuần thì sẽ có 1 tổ công nhân nghỉ việc và năng suất lao động giảm 5 sản phẩm/1 tổ/1 giờ. Ngoài ra, số phế phẩm mỗi tuần ước tính là $P(x) = \frac{95x^2 + 120x}{4}$, với x là thời gian làm việc trong một tuần. Nhà máy cần áp dụng thời gian làm việc mỗi tuần mấy giờ để số lượng sản phẩm thu được mỗi tuần là lớn nhất?

Trả lời:

3	6		
---	---	--	--

Lời giải

Gọi số giờ làm tăng thêm mỗi tuần là t , $t \in \mathbb{R}$.

Số tổ công nhân bỏ việc là $\frac{t}{2}$ nên số tổ công nhân làm việc là $100 - \frac{t}{2}$ (tổ).

Năng suất của tổ công nhân còn $120 - \frac{5t}{2}$ sản phẩm một giờ.

Số thời gian làm việc một tuần là $40 + t = x$ (giờ).

$$\text{Để nhà máy hoạt động được thì } \begin{cases} 40 + t > 0 \\ 120 - \frac{5t}{2} > 0 \\ 100 - \frac{t}{2} > 0 \end{cases} \Rightarrow t \in (-40; 48).$$

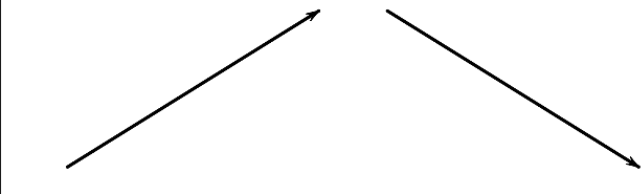
Số sản phẩm trong một tuần làm được: $S = \left(100 - \frac{t}{2}\right) \left(120 - \frac{5t}{2}\right) (40 + t)$.

Số sản phẩm thu được là: $f(t) = \left(100 - \frac{t}{2}\right) \left(120 - \frac{5t}{2}\right) (40 + t) - \frac{95(40 + t)^2 + 120(40 + t)}{4}$

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{-1}{2} \left(120 - \frac{5t}{2}\right) (40 + t) - \frac{5}{2} \left(100 - \frac{t}{2}\right) (40 + t) + \left(100 - \frac{t}{2}\right) \left(120 - \frac{5t}{2}\right) - \frac{95}{2} (40 + t) - 30 \\ &= \frac{15}{4} t^2 - \frac{1135}{2} t - 2330 \end{aligned}$$



Ta có $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \text{ (thỏa mãn)} \\ t = \frac{466}{3} \text{ (loại)} \end{cases}$ và có bảng biến thiên:

x	-40	-4	48
$y'(x)$	$+$	0	$-$
$y(x)$			

Dựa vào bảng biến thiên ta có số lượng sản phẩm thu được lớn nhất thì thời gian làm việc trong một tuần là $40 + (-4) = 36$

Câu 18: Một nhà máy sản xuất x sản phẩm trong mỗi tháng. Chi phí sản xuất x sản phẩm được cho bởi hàm chi phí $C(x) = 16000 + 500x - 1,6x^2 + 0,004x^3$ (nghìn đồng). Biết giá bán của mỗi sản phẩm là một hàm số phụ thuộc vào số lượng sản phẩm x và được cho bởi công thức $p(x) = 1700 - 7x$ (nghìn đồng). Hỏi mỗi tháng nhà máy nên sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất? Biết rằng kết quả khảo sát thị trường cho thấy sản phẩm sản xuất ra sẽ tiêu thụ hết.

Trả lời:

1	0	0	
---	---	---	--

Lời giải

Số tiền nhà máy thu được khi bán hết x sản phẩm là: $x.p(x) = 1700x - 7x^2$ (nghìn đồng)

Lợi nhuận nhà máy thu được khi sản xuất và bán hết x sản phẩm là:

$$x.p(x) - C(x) = -0,004x^3 - 5,4x^2 + 1200x - 16000 \text{ (với } x > 0 \text{)}.$$

Xét hàm số $f(x) = -0,004x^3 - 5,4x^2 + 1200x - 16000$ trên $(0; +\infty)$

$$\text{Ta có } f'(x) = -0,012x^2 - 10,8x + 1200; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 100 \\ x = -1000 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	0	100	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	-16000	46000	$-\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra $\max_{(0; +\infty)} f(x) = f(100) = 46000$ (nghìn đồng).

Vậy mỗi tháng nhà máy nên sản xuất 100 sản phẩm thì lợi nhuận thu được là lớn nhất.



Vậy mỗi tháng nhà máy nên sản xuất 100 sản phẩm thì lợi nhuận thu được là lớn nhất.

Câu 19: Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in...) được cho bởi $C(x) = x^2 - 2000x + 10^8$ đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng.

$M(x) = \frac{T(x)}{x}$ với $T(x)$ là tổng chi phí (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí, được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Khi số lượng cuốn tạp chí phát hành cực lớn thì chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ sẽ tiệm cận với đường thẳng có phương trình dạng $y = ax + b$. Tính $P = 68a + 3b + 800$

Trả lời:

6	8	6	8
---	---	---	---

Lời giải

Theo giả thiết, ta có: $T(x) = C(x) + 4000x = x^2 + 2000x + 10^8$ (đồng).

$$M(x) = \frac{T(x)}{x} = x + \frac{10^8}{x} + 2000.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [M(x) - (x + 2000)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + \frac{10^8}{x} + 2000 - (x + 2000) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{10^8}{x} \right] = 0.$$

Khi đó đồ thị hàm số $M(x) = x + \frac{10^8}{x} + 2000$ có 1 tiệm cận xiên là $y = x + 2000$.

Khi số lượng cuốn tạp chí phát hành cực lớn thì chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ sẽ tiệm cận với đường thẳng $y = x + 2000$ suy ra $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2000 \end{cases}$.

Vậy $P = 68a + 3b + 800 = 68 \cdot 1 + 3 \cdot 2000 + 800 = 6868$.

Câu 20: Một công ty kinh doanh dịch vụ nghỉ dưỡng nhận thấy rằng: Nếu áp dụng mức giá 3 triệu đồng/người/ngày thì mỗi tháng có 140 khách đến nghỉ và mỗi khách sẽ nghỉ 12 ngày. Nếu cứ tăng giá thêm 500 nghìn đồng/người/ngày thì hàng tháng số khách đến nghỉ sẽ giảm đi 6 người và thời gian lưu trú của mỗi người khách cũng giảm 2 ngày. Ngược lại, nếu cứ giảm 500 nghìn đồng/người/ngày thì hàng tháng số khách đến nghỉ sẽ tăng thêm 6 người và thời gian lưu trú của mỗi người khách cũng tăng thêm 2 ngày. Hỏi công ty cần áp dụng mức giá bao nhiêu triệu đồng/người/ngày để lợi nhuận hàng tháng thu được là lớn nhất, biết tổng chi phí công ty phải chi cho một ngày lưu trú của mỗi người khách là 2 triệu đồng và Sở du lịch không cho công ty thu vượt quá 10 triệu đồng/người/ngày. (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Trả lời:

3	,	8	2
---	---	---	---

Lời giải

Gọi x (triệu/người/ngày, $0 < x < 10$) là giá dịch vụ nghỉ dưỡng.



Trường hợp 1: Tăng giá suy ra $3 < x < 10$ nên số khách giảm đi khi tăng giá là: $\frac{x-3}{0,5} \cdot 6$.

Số ngày nghỉ dưỡng của một khách giảm là: $\frac{x-3}{0,5} \cdot 2$.

Vì số tiền công ty chi trả cho một ngày nghỉ dưỡng của một khách là 2 triệu nên lợi nhuận mà

$$\text{công ty thu được là } L(x) = \left(140 - \frac{x-3}{0,5} \cdot 6\right) \left(12 - \frac{x-3}{0,3} \cdot 2\right) (x-2)$$

$$= (176 - 12x)(24x - 48 - 4x^2 + 8x) = (176 - 12x)(-4x^2 + 32x - 48)$$

$$= -704x^2 + 5632x - 8448 + 48x^3 - 384x^2 + 576x = 48x^3 - 1088x^2 + 6208x - 8448.$$

$$L'(x) = 144x^2 - 2176x + 6208 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3,82 \\ x = 11,29 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	3	3,82		10
$L'(x)$		+	0	-
$L(x)$		$L(3,82)$		

$$\text{Vậy } L_{\max} = L(3,82) \Leftrightarrow x = 3,82.$$

Trường hợp 2: Giảm giá suy ra $0 < x < 3$ nên số khách tăng thêm khi giảm giá là: $\frac{3-x}{0,5} \cdot 6$.

Số ngày nghỉ dưỡng của một khách tăng thêm là: $\frac{3-x}{0,5} \cdot 2$.

Vì số tiền công ty chi trả cho một ngày nghỉ dưỡng của một khách là 2 triệu nên lợi nhuận mà công ty thu được là

$$L(x) = \left(140 + \frac{3-x}{0,5} \cdot 6\right) \left(12 + \frac{3-x}{0,3} \cdot 2\right) (x-2) = 48x^3 - 1088x^2 + 6208x - 8448.$$

$$L'(x) = 144x^2 - 2176x + 6208 \text{ và } L'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3,82 \text{ (loại)} \\ x = 11,29 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Suy ra hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;3)$.

Vậy công ty nên áp dụng mức giá 3,82 (triệu/người/ngày) để lợi nhuận lớn nhất.

Câu 21: Một công ty muốn đầu tư vào hệ thống điện mặt trời có công suất x (đơn vị tính: MW). Theo nghiên cứu cho thấy một số thông tin sau: Chi phí đầu tư ban đầu là $C_1(x) = 1400 + 55x$ (tỷ đồng).

Doanh thu hàng năm là $R(x) = 28x - 0,15x^2$ (tỷ đồng/năm). Chi phí vận hành hàng năm là



$C_2(x) = 12 + 0,35x + 0,012x^2$ (tỷ đồng/năm). Hãy tìm công suất x (làm tròn đến hàng đơn vị) để tối đa hóa lợi nhuận trên đầu tư, được tính là tỷ lệ lợi nhuận hàng năm trên chi phí đầu tư ban đầu

Trả lời:

4	6		
---	---	--	--

Lời giải

Lợi nhuận hàng năm là doanh thu trừ chi phí vận hành hàng năm: $P(x) = R(x) - C_2(x)$

$$P(x) = (28x - 0,15x^2) - (12 + 0,35x + 0,012x^2) = -0,162x^2 + 27,65x - 12$$

Tỷ lệ lợi nhuận trên đầu tư là lợi nhuận hàng năm chia cho chi phí đầu tư ban đầu:

$$L(x) = \frac{P(x)}{C_1(x)} = \frac{-0,162x^2 + 27,65x - 12}{1400 + 55x}$$

$$L'(x) = \frac{(-0,324x + 27,65)(1400 + 55x) - (-0,162x^2 + 27,65x - 12)(55)}{(1400 + 55x)^2}$$

$$= \frac{-8,91x^2 - 453,6x + 39370}{(1400 + 55x)^2} = 0 \Leftrightarrow -8,91x^2 - 453,6x + 39370 = 0 \Rightarrow x \approx 45,7 \approx 46$$

Vậy công suất để tối đa hóa lợi nhuận trên đầu tư là khoảng 46 MW.

Câu 22: Để hạn chế vi phạm thời gian làm việc đối với công nhân, giám đốc công ty quyết định xử lý bằng cách phạt tiền. Nhờ sự giám sát chặt chẽ của các quản đốc, giám đốc công ty biết được trong một tháng, giữa tỉ lệ công nhân vi phạm đúng k lần ($1 \leq k \leq 2$) là $t_k = \frac{N_k}{N}$ (trong đó N_k là số công nhân vi phạm đúng k lần, N là tổng số công nhân) và mức phạt mỗi lần vi phạm có mối liên hệ như sau:

Nếu mỗi công nhân nộp phạt x nghìn đồng ($60 \leq x \leq 300$) khi vi phạm lần thứ nhất và nộp phạt $x - 20$ nghìn đồng khi vi phạm lần thứ hai thì $t_1 = \frac{36}{x+10}$ và $t_2 = \frac{4}{x-30}$ (không có công nhân nào vi phạm quá hai lần). Biết rằng N không đổi và bằng 2400. Tổng số tiền nộp phạt của các công nhân vi phạm trong một tháng ít nhất là bao nhiêu triệu đồng? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Trả lời:

1	0	3	
---	---	---	--

Lời giải

$$\text{Ta có: } t_k = \frac{N_k}{N} \Leftrightarrow N_k = N \cdot t_k.$$

$$\text{Số công nhân vi phạm đúng một lần là } N_1 = N \cdot t_1 = \frac{36N}{x+10}.$$

$$\text{Suy ra số tiền nộp phạt từ } N_1 \text{ công nhân này là: } N_{1,x} = \frac{36Nx}{x+10} \text{ (nghìn đồng).}$$

Số công nhân vi phạm đúng hai lần là $N_2 = N.t_2 = \frac{4N}{x-30}$.

Suy ra số tiền nộp phạt từ N_2 công nhân này là: $N_2.(x+x-20) = \frac{4N(2x-20)}{x-30}$ (nghìn đồng).

Vậy tổng số tiền nộp phạt của các công nhân vi phạm trong một tháng là:

$$f(x) = \frac{36Nx}{x+10} + \frac{4N(2x-20)}{x-30} \Leftrightarrow f(x) = 4N \left(\frac{9x}{x+10} + \frac{2x-20}{x-30} \right).$$

Xét hàm số $f(x)$ với $x \in [60; 300]$, ta có: $f'(x) = 4N \cdot \left[\frac{90}{(x+10)^2} - \frac{40}{(x-30)^2} \right]$.

$$\text{Cho } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{90}{(x+10)^2} - \frac{40}{(x-30)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 110 & (\text{thỏa mãn}) \\ x = 14 & (\text{loại}) \end{cases}.$$

x	60	50	300
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\frac{928N}{21}$	$43N$	$\frac{35352N}{837}$

Từ bảng biến thiên ta thấy tổng số tiền nộp phạt của các công nhân vi phạm trong một tháng ít nhất là: $43N = 43.2400 = 103200$ (nghìn đồng) ≈ 103 (triệu đồng).

Câu 23: Một doanh nghiệp kinh doanh một loại sản phẩm T được sản xuất trong nước. Qua nghiên cứu thấy rằng nếu chi phí sản xuất mỗi sản phẩm T là x (USD) thì số sản phẩm T các nhà máy sản xuất sẽ là $R(x) = x - 200$ và số sản phẩm T mà doanh nghiệp bán được trên thị trường trong nước sẽ là $Q(x) = 4200 - x$. Số sản phẩm còn dư doanh nghiệp xuất khẩu ra thị trường quốc tế với giá bán mỗi sản phẩm ổn định trên thị trường quốc tế là $x_0 = 3200$ (USD). Nhà nước đánh thuế trên mỗi sản phẩm xuất khẩu là a (USD) và luôn đảm bảo tỉ lệ giữa lãi xuất khẩu của doanh nghiệp và thuế thu được của nhà nước tương ứng là $4:1$. Hãy xác định giá trị của a biết lãi mà doanh nghiệp thu được do xuất khẩu là nhiều nhất

Trả lời:

1	0	0	
---	---	---	--

Lời giải

Điều kiện: $R(x) = x - 200 > 0; Q(x) = 4200 - x > 0 \Rightarrow 200 < x < 4200$.

Số sản phẩm xuất khẩu là: $R(x) - Q(x) = x - 200 - (4200 - x) = 2x - 4400$

Lãi xuất khẩu của doanh nghiệp là:

$$L(x) = (R(x) - Q(x))(3200 - x - a) = (2x - 4400)(3200 - x - a).$$

Thuế thu được của nhà nước là: $T(x) = (2x - 4400)a$.

Ta có $L(x):T(x) = 4:1$, suy ra $(2x - 4400)(3200 - x - a) = 4(2x - 4400)a \Rightarrow a = \frac{3200 - x}{5}$



$$\begin{aligned}\text{Khi đó } L(x) &= (2x - 4400) \left(3200 - x - \frac{3200 - x}{5} \right) \\ &= (2x - 4400) \frac{12800 - 4x}{5} = \frac{1}{5} (-8x^2 + 43200x - 56320000)\end{aligned}$$

Bài toán đưa về tìm x để $L(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

$$\text{Ta có } L'(x) = \frac{1}{5} (-16x + 43200) = 0 \Leftrightarrow x = 2700 \in (200; 4200).$$

Lập bảng biến thiên ta thấy $L(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 2700$, suy ra $a = \frac{3200 - 2700}{5} = 100$.

Câu 24: Doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) được mô hình hóa bằng hàm số $f(t) = \frac{24000}{1 + 6e^{-t}}, t \geq 0$ trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Tốc độ bán hàng lớn nhất đạt được khi $t = \ln a$. Tìm a

Trả lời:

6			
---	--	--	--

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{144000e^{-t}}{(1 + 6e^{-t})^2} \text{ biểu thị tốc độ bán hàng. Đặt } g(t) = f'(t) = \frac{144000e^{-t}}{(1 + 6e^{-t})^2}, t \geq 0$$

$$\begin{aligned}\text{Tính } g(t) &= \frac{-144000 \cdot e^{-t} (1 + 6e^{-t})^2 - 144000e^{-t} \cdot 2(1 + 6e^{-t})(-6 \cdot e^{-t})}{(1 + 6e^{-t})^4} \\ &= \frac{-144000 \cdot e^{-t} (1 + 6e^{-t}) [1 + 6e^{-t} - 12e^{-t}]}{(1 + 6e^{-t})^4} = -\frac{144000e^{-t} (1 - 6e^{-t})}{(1 + 6e^{-t})^3}\end{aligned}$$

$$\text{Ta có } g'(t) = 0 \Leftrightarrow 1 - 6e^{-t} = 0 \Leftrightarrow e^t = 6 \Leftrightarrow t = \ln 6$$

Vậy tốc độ bán hàng lớn nhất khi $t = \ln 6$ suy ra $a = 6$.

Câu 25: Một công ty đang triển khai chiến dịch quảng cáo sản phẩm mới. Số tiền đầu tư quảng cáo là A (triệu đồng). Theo kết quả nghiên cứu thị trường, số lượng sản phẩm bán ra (đơn vị: sản phẩm) phụ thuộc vào chi phí quảng cáo theo hàm: $q(A) = 1000 + \frac{1013}{3} \ln(1 + A)$. Biết rằng, chi phí sản xuất mỗi sản phẩm là 10 triệu đồng và giá bán mỗi sản phẩm là 20 triệu đồng. Giá trị lợi nhuận tối đa mà công ty có thể đạt được là bao nhiêu tỉ đồng (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Trả lời:

3	4	,	1
---	---	---	---

Lời giải

$$\text{Tổng chi phí sản xuất: } C(A) = q(A) \cdot 10 + A \text{ (triệu đồng).}$$



Tổng lợi nhuận: $L(A) = 20q(A) - C(A) = 10000 + \frac{10130}{3} \ln(1+A) - A$ (triệu đồng).

Tập xác định: $D = [0; +\infty)$ và đạo hàm $L'(A) = \frac{10130}{3} \cdot \frac{1}{1+A} - 1 = \frac{10127 - 3A}{3(1+A)}$.

$L'(A) = 0 \Leftrightarrow A = \frac{10127}{3}$ và có $L\left(\frac{10127}{3}\right) \approx 34059$.

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{10127}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	10000	34059	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta được giá trị lợi nhuận tối đa mà công ty có thể đạt được là $L\left(\frac{10127}{3}\right) \approx 34,1$ tỷ đồng.

Câu 26: Một công ty xác định rằng tổng chi phí của họ, tính theo nghìn đô - la, để sản xuất x mặt hàng là $C(x) = \sqrt{5x^2 + 60}$, và công ty lên kế hoạch nâng sản lượng trong t tháng kể từ nay theo hàm $x(t) = 20t + 40$. Tính tốc độ tăng của chi phí sau 4 tháng kể từ nay? (Làm tròn kết quả đến hàng phần chục, đơn vị nghìn đô-la/tháng)

Trả lời:

4	4	,	7
---	---	---	---

Lời giải

Ta có: $C'(x) = \frac{5x}{\sqrt{5x^2 + 60}}, x'(t) = 20$

Khi đó $x(4) = 120 \Rightarrow C'(x(4)) = C'(120)$

Tốc độ tăng của chi phí sau là $(C(x(t)))' = x'(t) \cdot C'(x(t))$

Vậy tốc độ tăng của chi phí sau 4 tháng là $x'(4) \cdot C'(x(4)) = 20 \cdot \frac{600}{\sqrt{72060}} \approx 44,7$

Câu 27: Mỗi tuần, một cửa hàng bán điện thoại di động trung bình bán được 1000 điện thoại A với giá 14 triệu đồng một cái. Biết rằng, nếu cứ giảm giá bán 500 nghìn đồng/1 cái, số lượng điện thoại A bán ra sẽ tăng thêm khoảng 100 cái mỗi tuần. Biết rằng nếu bán x cái điện thoại A thì giá mỗi cái là $p(x)$ (triệu đồng) và hàm chi phí hàng tuần $C(x) = 12000 - 3x$ (triệu đồng). Để lợi nhuận là lớn nhất, cửa hàng nên bán mỗi cái điện thoại A với giá bao nhiêu (triệu đồng)?

Trả lời:



Lời giải

Theo giả thiết $P(x) = ax + b$.

Do đó, phương trình đường thẳng $P(x) = ax + b$ đi qua hai điểm $(1000; 14)$ và $(1100; 13,5)$.

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} 14 = 1000a + b \\ 13,5 = 1100a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-1}{200} \\ b = 19 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)} \Rightarrow P(x) = -\frac{1}{200}x + 19.$$

Doanh thu bán hàng của x sản phẩm là $R(x) = x \cdot p(x) = x \cdot \left(-\frac{1}{200}x + 19\right) = -\frac{x^2}{200} + 19x$ (triệu đồng)

Do đó, hàm số thể hiện lợi nhuận thu được khi bán x sản phẩm là

$$P(x) = R(x) - C(x) = \frac{-x^2}{200} + 19x - 12000 + 3x = \frac{-x^2}{200} + 22x - 12000 \text{ (triệu đồng)}.$$

Để lợi nhuận là lớn nhất thì $P(x)$ là lớn nhất.

Ta có: $P'(x) = \frac{-x}{100} + 22$; $P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2200$. Lập bảng biến thiên, ta kết luận bán 2200 cái điện thoại A thì lợi nhuận là cao nhất.

Vậy cửa hàng nên đặt giá bán là $p(2200) = 8$ (triệu đồng).

Câu 28: Tại một nhà máy, khi sản xuất và bán ra x sản phẩm A ($0 \leq x \leq 250$) trong một tháng thì tổng chi phí mà nhà máy phải trả là $C(x) = 0,00024x^3 - 0,03x^2 + 5x + 30$ (triệu đồng) và doanh thu tương ứng là $D(x) = -0,01x^2 + 16x - 25$ (triệu đồng). Hỏi trong một tháng, lợi nhuận lớn nhất mà nhà máy đó có thể thu được nhờ vào sản xuất và bán sản phẩm A bằng bao nhiêu triệu đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Trả lời:

Lời giải

Lợi nhuận trong một tháng của doanh nghiệp khi sản xuất và bán ra x sản phẩm A là

$$\begin{aligned} R(x) &= D(x) - C(x) = (-0,01x^2 + 16x - 25) - (0,00024x^3 - 0,03x^2 + 5x + 30) \\ &= -0,00024x^3 + 0,02x^2 + 11x - 55 \end{aligned}$$

Xét hàm số $R(x) = -0,00024x^3 + 0,02x^2 + 11x - 55$ với $x \in [0; 250]$, ta có

$$R'(x) = -0,00072x^2 + 0,04x + 11;$$

$$R'(x) = 0 \Leftrightarrow -0,00072x^2 + 0,04x + 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{100\sqrt{130} + 250}{9} \\ x = \frac{-100\sqrt{130} + 250}{9} \end{cases}$$



Với $x \in [0; 250]$ ta được $x = \frac{100\sqrt{130} + 250}{9} = 154,463\dots$

Hàm $R(x)$ liên tục trên $[0; 250]$ và ta có $R(0) = -55$

$$R\left(\frac{100\sqrt{130} + 250}{9}\right) = 1236,796\dots \approx 1237 \approx R(154) \approx R(155); R(250) = 195$$

Suy ra lợi nhuận lớn nhất mà nhà máy thu được vào khoảng 1237 (triệu đồng) khi $x = 154$ hoặc $x = 155$.

----- HẾT -----

**ĐỀ RÈN LUYỆN 07D: TỐC ĐỘ THAY ĐỔI CỦA CÁC ĐẠI LƯỢNG**

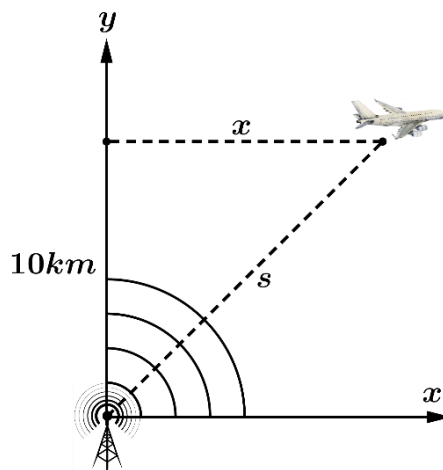
Chuyên đề tính đơn điệu của hàm số gồm lý thuyết và ví dụ minh họa

Sưu tầm và biên soạn: Phan Nhật Linh

KẾT NỐI TRI THỨC

Tài liệu khóa học luyện thi THPT Quốc Gia theo chương trình mới

Câu 1: Một máy bay đang bay ở độ cao 10 km so với mặt đất và thu phát tín hiệu qua một ăng-ten ra đa như hình vẽ.

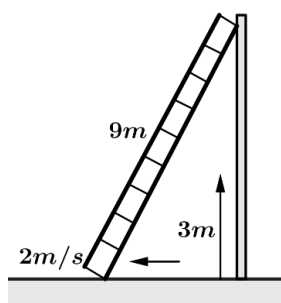


Khi máy bay cách ra đa 16 km thì ra đa phát hiện khoảng cách giữa máy bay ra đa thay đổi với tốc độ 546 (km/h). Tìm vận tốc của máy bay (Đơn vị: km/h và kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Đáp án:

--	--	--	--

Câu 2: Một chiếc thang dài 9 m tựa vào một bức tường thẳng đứng trên một mặt đất bằng phẳng. Khi đầu dưới của thang di chuyển trên mặt đất ra xa bức tường với vận tốc không đổi là 2 (m/s) thì đầu trên cùng của thang cũng sẽ trượt xuống dọc theo bức tường. Khi điểm đầu thang cách mặt đất 3 m thì tốc độ di chuyển của nó bằng bao nhiêu? (Đơn vị: m/s và kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

**Đáp án:**

--	--	--	--

Câu 3: Trong hình vẽ, một trạm quan sát A (đặt tại mặt đất) có radar để theo dõi các máy bay. Ở một thời điểm, một máy bay đang ở B có độ cao $h = 9$ (km), chuyển động với tốc độ không đổi trên một hướng bay cắt đường thẳng đứng vuông góc với mặt đất tại A như hình vẽ. Ở thời điểm t_1 đo được khoảng cách từ máy bay tới trạm quan sát là 36 km và khoảng cách này đang giảm với tốc độ bằng 360 (km/h). Ở thời điểm t_2 được khoảng cách từ máy bay tới trạm quan sát là 24 km

The diagram shows a ship's path as a horizontal line with two points, B_1 and B_2 , marked with blue arrows indicating direction. A point H is at the end of this line. A satellite A is shown at the bottom right. Dashed lines connect A to B_1 (labeled 36km), A to B_2 (labeled 24km), and A to H (labeled 9km). Below B_1 is the label t_1 , and below B_2 is the label t_2 .

--	--	--	--

--	--	--	--

Diagram illustrating a rectangular plot of land $ABCD$ with dimensions $50m$ (width) and $20m$ (height). The plot is divided into three regions:

- Phần sáng của mảnh đất** (Bright part of the plot): The top region, bounded by AB , MA , and MC .
- Phần tối của mảnh đất** (Dark part of the plot): The bottom region, bounded by MC , CD , and DA .
- Mái nhà chắn ánh sáng** (Roof blocking light): The bottom right region, bounded by CD and the roof line.

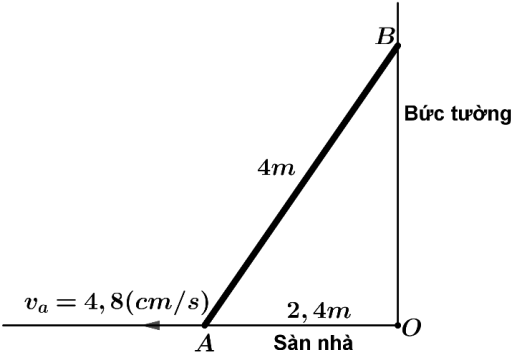


Có thời điểm đường ranh giới này đi qua hai điểm A, M như hình vẽ (M là trung điểm một cạnh hình chữ nhật). Khi diện tích phần tối của mảnh đất bằng 75m^2 , người ta đo được tốc độ giảm cạnh theo phương AD bằng 2 cm/s . Hỏi tốc độ giảm diện tích phần tối của mảnh đất là bao nhiêu cm^2/s ? Kết quả được làm tròn đến hàng phần chục

Đáp án:

--	--	--	--

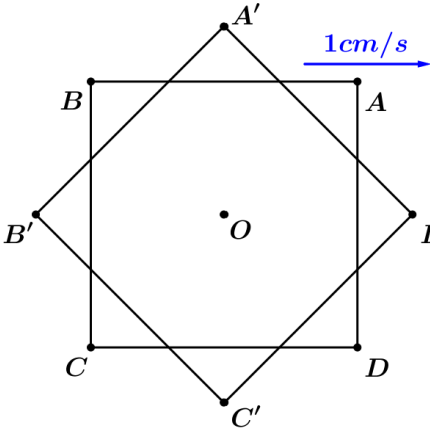
Câu 6: Có một thanh cứng (chiếc thang như hình vẽ) AB có độ dài 4 mét, đầu A di chuyển trên sàn nhà theo phương vuông góc với bức tường, đầu B di chuyển trên tường theo phương vuông góc với sàn nhà. Biết rằng bức tường và sàn nhà vuông góc với nhau. Ở một thời điểm, khi mà đầu A đang cách chân tường một đoạn bằng $2,4\text{ m}$ thì nó di chuyển với tốc độ bằng $v_A = 4,8(\text{cm/s})$ thì đầu B sẽ di chuyển với tốc độ bằng bao nhiêu (cm/s)? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?



Đáp án:

--	--	--	--

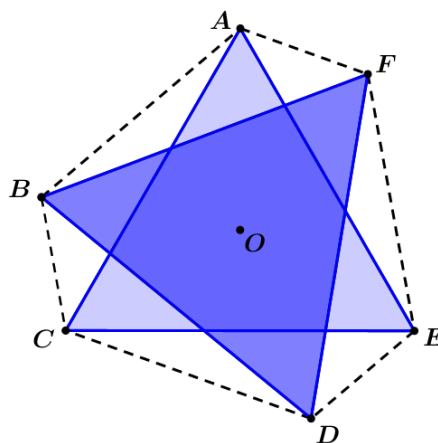
Câu 7: Trên bàn học có 2 mảnh kính hình vuông đồng tâm đều có cạnh là 4 cm . Trong đó có 1 mảnh kính bị lệch đi 45° so với mảnh kính ở dưới. Do dính mưa nên 2 mảnh kính bị dính lại với nhau nên bạn Tuấn tách mảnh kính phía trên với tốc độ 1 cm/s theo hướng $\overrightarrow{BA}$. Hãy tính tốc độ thay đổi **tức thời** diện tích của phần bị trùng giữa 2 kính tại thời điểm $t = 1\text{ s}$.



Đáp án:

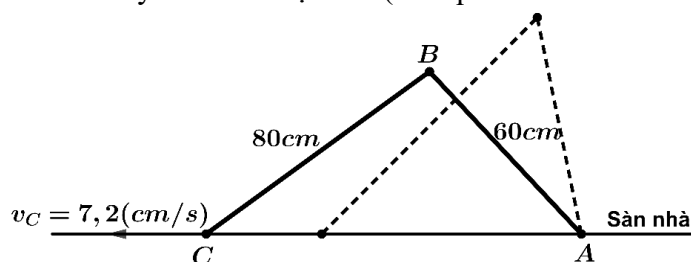
--	--	--	--

Câu 8: Trên mặt bàn có một lá bài hình tam giác đều ABC độ dài cạnh bằng 10 cm . Người ta xếp lên trên lá bài này bởi một lá bài tam giác đều DEF có cùng kích thước sao cho tâm của chúng trùng nhau như hình vẽ dưới đây. Khi đó sáu đỉnh A, B, C, D, E, F của hai lá bài này là các đỉnh của một hình lục giác có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu centimet vuông (làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần chục)

**Đáp án:**

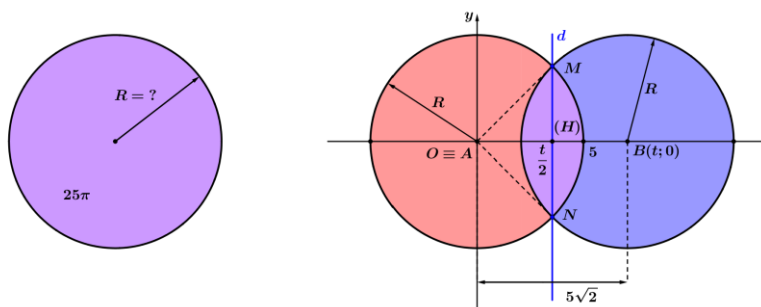
--	--	--	--

Câu 9: Cho hai thanh cứng gắn với nhau bằng một bản lề B , một thanh có đầu còn lại được gắn cố định với sàn nhà tại điểm A , một thanh có đầu còn lại C có thể chuyển động tự do trên sàn dọc theo giao tuyến của mặt phẳng (ABC) với sàn nhà. Biết $AB = 60\text{ cm}$, $BC = 80\text{ cm}$ và mặt phẳng (ABC) luôn vuông góc với sàn nhà. Tại một thời điểm khi tam giác ABC vuông tại B thì thấy tốc độ di chuyển của điểm C là $7,2\text{ (cm/s)}$. Hãy xác định tốc độ thay đổi khoảng cách từ điểm B đến sàn nhà ở thời điểm này theo đơn vị cm/s (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?

**Đáp án:**

--	--	--	--

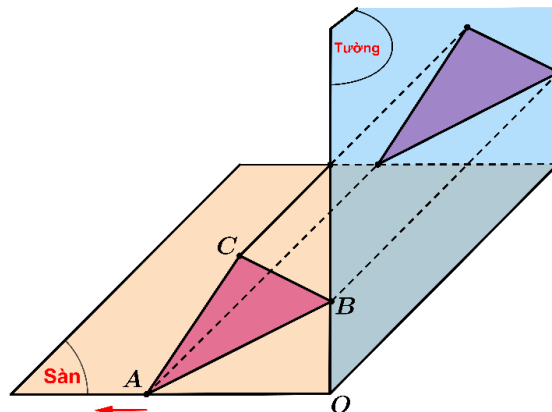
Câu 10: Tuấn có hai tấm nhựa mỏng (bỏ qua độ dày), trong suốt, hình tròn và có cùng bán kính. Một tấm màu đỏ và một tấm màu xanh. Ban đầu Tuấn đặt hai tấm chồng lên nhau tạo thành một tấm hình tròn đồng tâm màu tím. Sau đó Tuấn tách hai tấm ra bằng cách kéo nhẹ tấm màu xanh trượt theo phương ngang với đường nối tâm của hai đường tròn với tốc độ 1 (cm/s) sao cho hai tấm vẫn cùng nằm trên một mặt phẳng. Khi đó Tuấn nhận thấy diện tích phần màu tím giảm theo một quy luật nhất định. Tính tốc độ giảm diện tích phần màu tím khi khoảng cách tâm của hai tấm nhựa ban đầu là $5\sqrt{2}\text{ (cm)}$. Biết rằng ban đầu diện tích phần màu tím là $25\pi\text{ (cm}^2\text{)}$ (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

**Đáp án:**

--	--	--	--



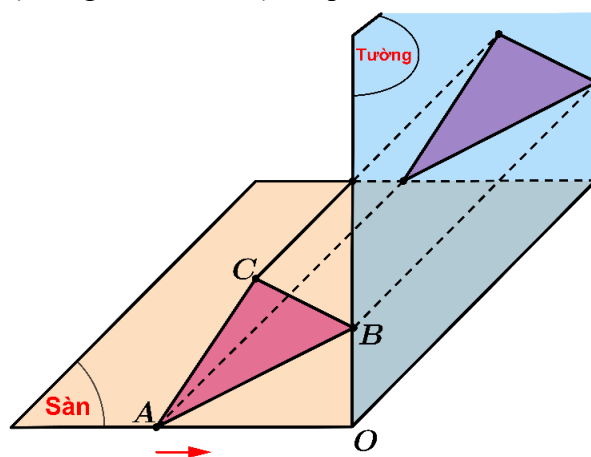
Câu 11: Một khối gỗ hình lăng trụ tam giác có thiết diện là một tam giác vuông ABC có độ dài các cạnh $AB = 260\text{cm}$, $BC = 100\text{cm}$ và $AC = 240\text{cm}$. Đỉnh A di chuyển trên sàn nhà theo phương vuông góc với bức tường, đỉnh B di chuyển trên bức tường theo phương vuông với sàn nhà. Bức tường và sàn nhà vuông góc với nhau. Ở thời điểm mà đỉnh A đang cách chân tường 150cm thì nó dịch chuyển ra xa với tốc độ $3,9\text{ (cm/s)}$. Hỏi tốc độ thay đổi khoảng cách của điểm C so với sàn nhà bằng bao nhiêu? (Đơn vị: cm/s và kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



Đáp án:

--	--	--	--

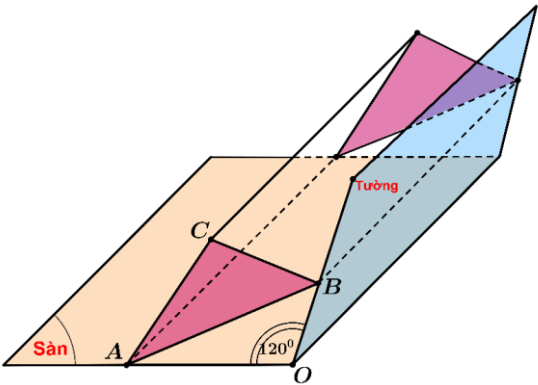
Câu 12: Một khối lăng trụ tam giác có thiết diện là một tam giác vuông ABC có độ dài các cạnh $AB = 25\text{ dm}$, $BC = 7\text{ dm}$ và $AC = 24\text{ dm}$. Đỉnh A di chuyển trên sàn nhà theo phương vuông góc với bức tường, đỉnh B di chuyển trên bức tường theo phương vuông với sàn nhà. Bức tường và sàn nhà vuông góc với nhau. Người ta bắt đầu tác dụng lực sao cho đầu A chuyển động đều về O và B chuyển động thẳng đứng lên. Ở thời điểm mà đỉnh A đang cách chân tường 20 dm thì nó dịch chuyển về phía bức tường với tốc độ 3 (dm/s) . Hỏi tốc độ thay đổi khoảng cách của điểm C so với sàn nhà (Đơn vị: dm/s) bằng bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



Đáp án:

--	--	--	--

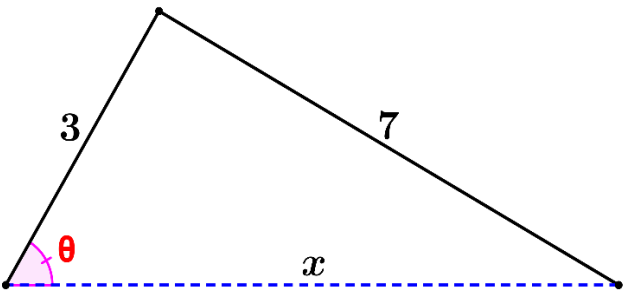
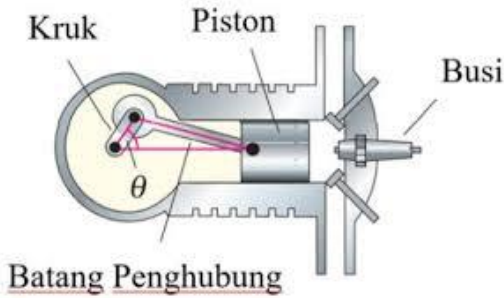
Câu 13: Một khối gỗ hình lăng trụ tam giác có thiết diện là một tam giác vuông ABC có độ dài các cạnh $AB = 10\text{ dm}$ và $BC = 6\text{ dm}$. Đỉnh A di chuyển trên sàn nhà theo phương tạo với bức tường một góc 120° , đỉnh B di chuyển trên bức tường đi xuống sàn nhà. Bức tường và sàn nhà tạo với nhau một góc 120° như hình vẽ dưới đây. Ở thời điểm mà đỉnh A đang cách chân tường O một khoảng 4 dm thì nó dịch chuyển ra xa với tốc độ $1,5\text{ (dm/s)}$. Hỏi tốc độ thay đổi khoảng cách của điểm C so với sàn nhà bằng bao nhiêu? (Đơn vị: dm/s và kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



Đáp án:

--	--	--	--

Câu 14: Hình vẽ dưới là sơ đồ của một động cơ pittông, bao gồm trục khuỷu (Crankshaft), pittông (Piston), thanh truyền (Connecting rod) và bugi (Spark plug). Có một góc θ được đánh dấu tại trục khuỷu. Khoảng cách từ tâm trục khuỷu đến điểm gắn thanh truyền là 3 inch (bán kính tay quay). Chiều dài thanh truyền là 7 inch. Khoảng cách từ tâm trục khuỷu đến đầu pittông theo phương ngang là x . Trục khuỷu quay ngược chiều kim đồng hồ với tốc độ không đổi là 200 vòng mỗi phút. Tìm tốc độ của pittông (inch/phút) khi góc $\theta = \frac{\pi}{3}$ radian (kết quả được làm tròn đến hàng đơn vị)



Đáp án:

--	--	--	--

----- HẾT -----





ĐỀ RÈN LUYỆN 07E: BÀI TOÁN TỐC ĐỘ NƯỚC DÂNG

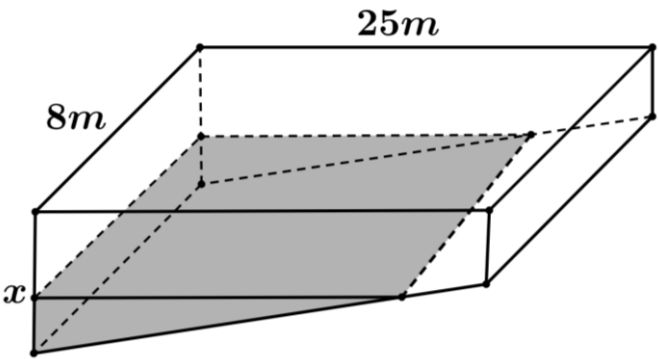
Chuyên đề tính đơn điệu của hàm số gồm lý thuyết và ví dụ minh họa

Sưu tầm và biên soạn: Phan Nhật Linh

KẾT NỐI TRI THỨC

Tài liệu khóa học luyện thi THPT Quốc Gia theo chương trình mới

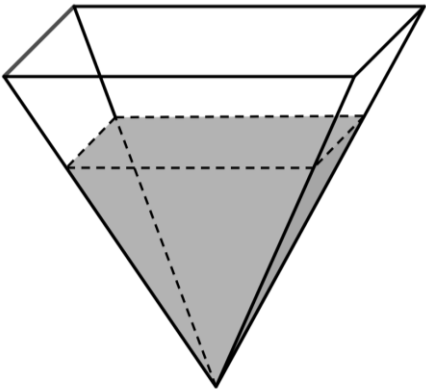
Câu 1: Trong một toà chung cư, nhằm đáp ứng nhu cầu giải trí của cư dân, chủ đầu tư xây 1 cái bể bơi hình chữ nhật có chiều dài 25m, chiều rộng 8m, một đầu có độ sâu là 1,2m và đầu kia là 2,2m (độ sâu là chiều cao tính từ đáy bể đến mép trên của bể), đáy bể được lát phẳng (tham khảo hình vẽ). Để bơm nước vào bể người ta lắp 1 máy bơm có công suất $1\text{m}^3/\text{phút}$. Trong thời gian bơm từ 45 phút đến 120 phút tính từ lúc bắt đầu đầu bơm (bơm từ lúc bể không có nước), thì mực nước dâng lên được một độ cao là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm, đơn vị là mét).



Trả lời:

--	--	--	--

Câu 2: Một cái bể nước có dạng khối chóp tứ giác đều ngược với cạnh đáy bằng $3\sqrt{2}$ (dm) và chiều cao bằng 6 (dm) (tham khảo hình vẽ - các kích thước được nêu ra là phần bên trong hình). Nước được bơm vào bể với tốc độ không đổi là 2 lít/phút và ban đầu bể không chứa nước. Hỏi tốc độ dâng lên của nước khi thể tích nước trong bể bằng $\frac{1}{3}$ thể tích của bể là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân sau dấu phẩy)

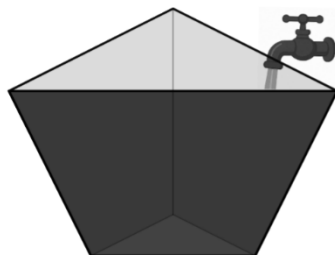


Trả lời:

--	--	--	--



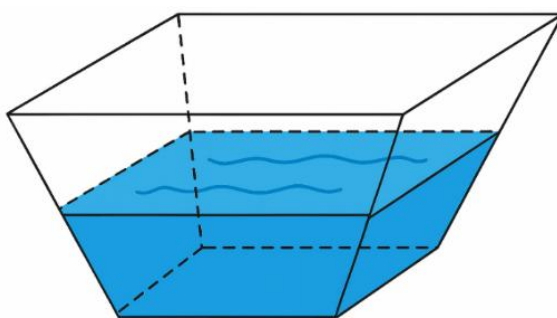
- Câu 3:** Một cái chậu đựng nước có dạng hình chóp cụt đều đáy là các tam giác cạnh bằng 1 dm và 3 dm. Chiều cao chậu nước bằng 4 dm. Người ta bơm nước vào chậu với lưu lượng không đổi 0,5 lít/phút. Đến phút thứ 10 thì tốc độ dâng lên của nước trong chậu là bao nhiêu dm/phút? (Kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).



Trả lời:

--	--	--	--

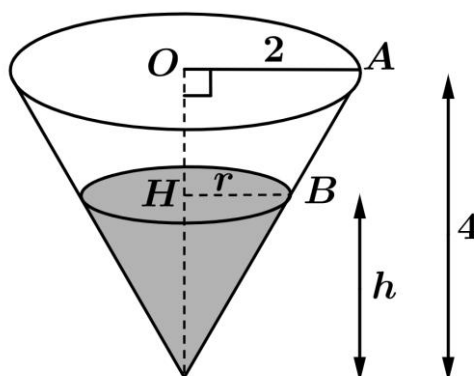
- Câu 4:** Một bể nước có dạng hình chóp cụt tứ giác đều có đáy dưới nhỏ hơn là hình vuông có cạnh bằng 40 cm, đáy trên có độ dài cạnh bằng 80 cm và chiều cao bể nước bằng 120 cm. Ban đầu bể không có nước, người ta bơm nước vào bể với tốc độ $1800 \text{ cm}^3/\text{phút}$. Hỏi ở thời điểm 25 phút kể từ lúc bắt đầu bơm thì tốc độ dâng lên của mực nước là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục)



Trả lời:

--	--	--	--

- Câu 5:** Một tháp nước có dạng hình nón đặt ngược, với bán kính đáy là 2m và chiều cao là 4m. Nước được bơm vào tháp với tốc độ $2 \text{ m}^3/\text{phút}$. Hỏi tốc độ mực nước đang dâng lên là bao nhiêu (tính bằng mét/phút) tại thời điểm mực nước trong tháp cao 3m?



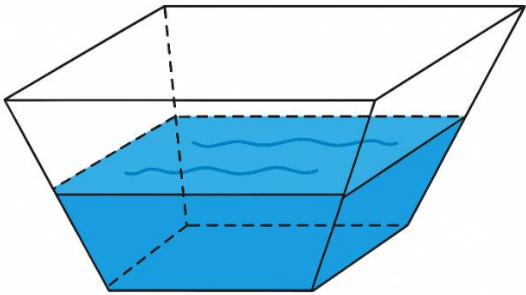
Trả lời:

--	--	--	--

- Câu 6:** Một bể nước có dạng hình chóp cụt tứ giác đều có đáy dưới nhỏ hơn là hình vuông có cạnh bằng 40 cm, đáy trên có độ dài cạnh bằng 80 cm và chiều cao bể nước bằng 120 cm. Ban đầu bể không



có nước, người ta bơm nước vào bể với tốc độ $2008 \text{ cm}^3/\text{phút}$. Hỏi ở thời điểm phút thứ 18 kể từ lúc bắt đầu bơm thì tốc độ dâng lên của mực nước theo cạnh bên là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

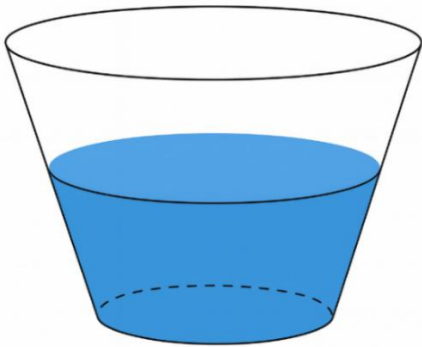


Trả lời:

--	--	--	--

Suy ra: $v_h = v_c \cdot \cos \alpha \Rightarrow v_c = \frac{v_h}{\cos \alpha} \approx 0,931 \cdot \frac{\sqrt{38}}{6} \approx 0,96 (\text{cm/phút})$

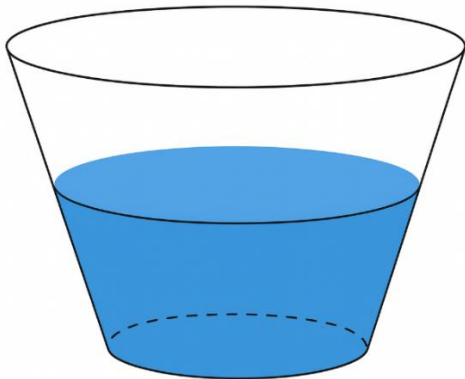
Câu 7: Một bể nước có dạng hình nón cụt ngược có chiều cao bằng $2,75 \text{ m}$. Bán kính đáy trên bằng 2 m và bán kính đáy dưới bằng $0,75 \text{ m}$. Ban đầu bể không chứa nước, sau đó người ta bơm nước vào bể với tốc độ $2 \text{ m}^3/\text{phút}$. Tại thời điểm chiều cao mực nước trong bể là 85 cm thì tốc độ dâng lên của mực nước trong bể bằng bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục)



Trả lời:

--	--	--	--

Câu 8: Một bể nước có dạng hình nón cụt ngược có chiều cao bằng $2,75 \text{ m}$. Bán kính đáy trên bằng 2 m và bán kính đáy dưới bằng $0,75 \text{ m}$. Ban đầu bể không chứa nước, sau đó người ta bơm nước vào bể với tốc độ $2 \text{ m}^3/\text{phút}$. Tại thời điểm phút thứ 6 kể từ lúc bắt đầu bơm nước thì tốc độ tăng của diện tích mặt nước trong bình là bao nhiêu $\text{m}^2/\text{phút}$? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục)



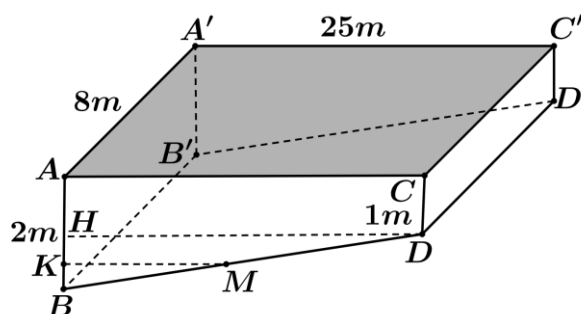
Trả lời:

--	--	--	--





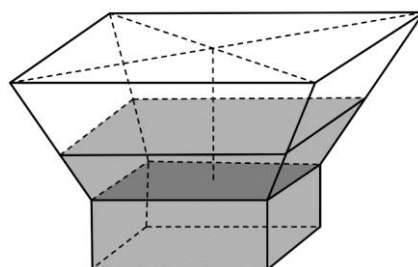
- Câu 9:** Mặt bể bơi của một dự án chung cư cao cấp có dạng hình hộp chữ nhật, với chiều dài là 25 m và chiều rộng là 8 m. Bể bơi sâu 1 m ở bên đầu nông và sâu 2 m bên đầu sâu. Biết hai đầu nông, sâu thuộc hai bên theo chiều dài của bể bơi (tham khảo hình vẽ minh họa). Ban đầu bể không có nước, nước bắt đầu được bơm vào bể lúc 7 giờ sáng với tốc độ $1 \text{ m}^3/\text{phút}$. Vào lúc 8 giờ 4 phút sáng thì mực nước dâng lên với tốc độ $\frac{1}{a} \text{ m/phút}$. Giá trị của a bằng bao nhiêu?



Trả lời:

--	--	--	--

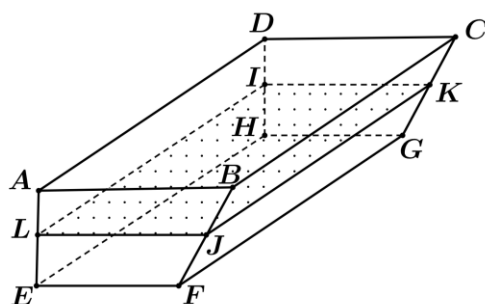
- Câu 10:** Một bể nước thiết kế phía dưới là hình hộp chữ nhật đáy là hình vuông cạnh bằng 10 mét, chiều cao 1 mét. Phía trên là hình chóp cụt tứ giác đều có đáy trên là hình vuông cạnh bằng 15 mét. Tổng chiều cao của bể là 4 mét. Lúc đầu bể không có nước, người ta bơm vào bể với tốc độ không đổi là 5 mét khối trên phút. Hỏi sau một giờ bơm thì tốc độ dâng lên của nước trong bể là bao nhiêu mét trên phút? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



Trả lời:

--	--	--	--

- Câu 11:** Cho một bể chứa nước có hình dạng là một lăng trụ đứng $AEFB.DHGC$. Mặt đáy của lăng trụ là hình thang vuông $AEFB$ (vuông tại A và B). Biết rằng chiều dài của bể $AD = 12 \text{ m}$ và chiều rộng của mặt bể $AB = 6 \text{ m}$, chiều rộng của đáy bể $EF = 3 \text{ m}$ và chiều cao của bể $AE = 4 \text{ m}$. Bể được bơm nước vào với lưu lượng không đổi $P = 4 \text{ m}^3/\text{giờ}$. Giả sử mặt nước ($IKJL$) luôn song song với mặt đáy ($HGFE$) của bể (tham khảo hình vẽ). Tính tốc độ tăng chiều cao của mực nước tại thời điểm $t = 18$ giờ (đơn vị tính theo mét trên giờ, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

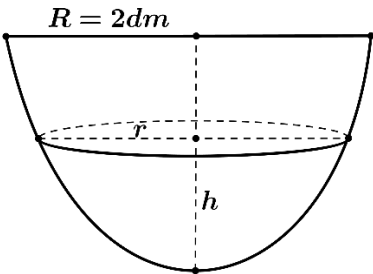




Trả lời:

--	--	--	--

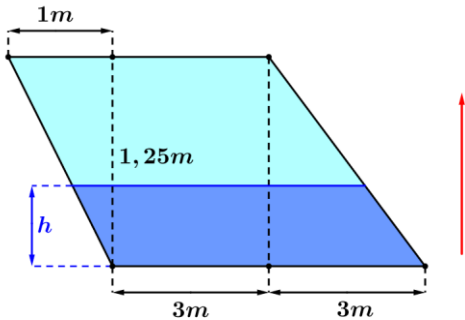
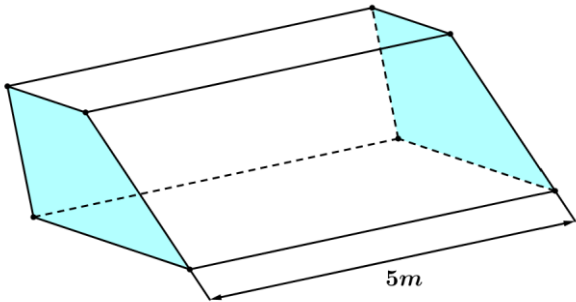
Câu 12: Một cái chậu đựng nước hình bán cầu có bán kính bằng 2 dm. Người ta đặt một ống nhựa và cho nước vào chậu với lưu lượng nước không đổi bằng 0,3 lít/phút. Đến phút thứ 6, tốc độ dâng lên của nước trong chậu bằng bao nhiêu dm/phút (làm tròn đến hàng phần trăm)?



Trả lời:

--	--	--	--

Câu 13: Một chiếc thùng nhiên liệu được gắn vào hai bên cánh của chiếc máy bay như hình vẽ bên trái dưới dài 5 mét và có mặt cắt là một hình phẳng như hình vẽ bên phải dưới đây. Biết rằng nhiên liệu được bơm vào thùng khiến cho mực chất lỏng cao lên theo phương mũi tên với tốc độ lưu lượng không đổi là 1 (dm³/s). Khi ấy tại thời điểm độ sâu của chất lỏng là $h = 10$ (cm) thì tốc độ thay đổi độ cao của mực chất lỏng này bằng bao nhiêu mm/s? (Kết quả làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



Trả lời:

--	--	--	--

----- HẾT -----